

Tourner & User

Un problème d'usinage

Quelques modèles pour l'usure¹ régresser, expérimenter

Vous désirez étudier des conditions de coupe en tournage des métaux (voir la Fig. 3 d'un tour à la fin de ce document). Il s'agira essentiellement de déterminer des temps d'opération d'une plaquette, ou outil, avant son remplacement. Nous aurons à analyser entre autres des résultats de plans d'expériences ou d'essais conçus pour analyser cette situation.

Nous aurons à utiliser des modèles d'usure, à en déterminer les paramètres par régression. Nous présenterons aussi quelques extensions de la régression : des éléments de planification d'expériences statistiques.

1 L'outil.

En tournage, un brut balancé, *i.e.* une pièce à tailler (à couper) est fixé par un mandrin et tourne selon son axe à vitesse contrôlée. Le porte-outil porte une plaquette, l'outil, qui effectue la taille. Il est amené en contact avec le brut. Le brut à tailler constitue la partie gauche de la Fig. 1, le porte-outil avec l'outil la partie droite. Il existe diverses plaquettes, les outils à proprement parler, qui garnissent le porte-outil qu'on peut utiliser pour la coupe (voir la Fig. 4 à la fin du document). Les diverses formes des plaquettes coupent les métaux de façons particulières adaptées aux usages.

Au dépassement des contraintes de cisaillement dans le tournage, un copeau se forme et la pièce est usinée (on voit un copeau en formation sur la Figure : l'outil). Les paramètres d'usinage sont la vitesse tangentielle en TPM,

¹Travail conjoint Bourdeau & Cloutier. Le professeur Guy Cloutier du Département de génie mécanique de l'École Polytechnique de Montréal, excellent collègue et statisticien dans l'âme.



FIG. 1 – L'outil de taille avec une plaquette.

F la vitesse de l'avance de l'outil en mm/T, P la profondeur du matériel à chercher (épaisseur du copeau) en mm. La variable Vol est le volume de matière usinée en fonction de T, V, F, P . Elle ne servira pas ici.

2 L'usure.

Trois faces d'une arête en travail sont en contact avec la matière. L'usure frontale est la plus importante, elle détermine l'état de la surface de la pièce usinée et la précision dimensionnelle. Pour les plaquettes en carbure, on explique la progression temporelle $U(t)$ de l'usure par la superposition de deux mécanismes physiques : l'abrasion $1 - e^{-\alpha t}$, et la diffusion $e^{\beta t} - 1$, où α et β sont positifs. L'usure totale est la résultante : $U(t) = A(1 - e^{-\alpha t}) + B(e^{\beta t} - 1)$, où A et B dépendent des conditions d'opérations du tour.

Les essais de l'expérience permettent de trouver par interpolation les temps d'usure critique en minutes, qu'on notera T , *i.e.* par interpolation entre le dernier temps observé, celui où l'usure critique est dépassée, et le temps précédent où elle ne l'est pas. Les conditions expérimentales, soit les valeurs de V, F, P pour chacun des essais sont déterminées pas une théorie qu'on ne présentera pas ici. On aura à analyser plusieurs plans d'essais.

3 Premiers essais

En cliquant l'icône à droite, on trouvera dans le fichier *usure.xls* les conditions des essais, *i.e.* les valeurs des conditions expérimentales, ainsi que les temps estimés d'usure critique pour les 16 essais d'un premier plan d'essais.

On y trouve aussi les efforts FX , FY , FZ dans un repère orthogonal idoine qu'impose l'outil sur le brut dans les diverses conditions expérimentales, ainsi que la longueur du vecteur résultant, FR .



3.1 Un hors-d'œuvre (25 points)

Tous les modèles qui semblent bons ne renvoient pas nécessairement à la réalité... Ainsi la variable FR , la norme du vecteur tridimensionnel de composantes orthogonales FX , FY , FZ ne s'explique absolument pas à l'aide du modèle linéaire avec ses composantes comme variables explicatives. Et pourtant...

1. (1 point) Justifiez l'affirmation précédente.
2. (2 points) Donnez l'équation du modèle statistique qui explique linéairement FR par ses composantes, et indiquez les hypothèses sur les résidus. Vous pourriez analyser les modèles avec et sans ordonnée à l'origine. Donnez la raison pour laquelle un modèle sans ordonnée à l'origine serait valable.
3. (4 points) Faire l'analyse du modèle linéaire avec ordonnée à l'origine qui explique FR par ses composantes. Concluez sur la capacité du modèle d'expliquer la norme du vecteur résultant FR .

Pour donner une explication des faits constatés au numéro précédent, nous allons procéder comme dans une des études de cas sur la simulation² (troisième partie). Considérons d'abord que la norme R d'un vecteur tridimensionnel est une fonction continue des 3 composantes³

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Calculez une approximation de Taylor au deuxième ordre, *i.e.* un polynôme de degré 1 dans ses trois variables x, y, z , de cette fonction centrée aux

²<http://www.mgi.polymtl.ca/marc.bourdeau/mth2301/simuler1.pdf>

³On renomme ici de façon évidente les composantes des forces dans le fichier de données.

moyennes des composantes que vous pouvez noter x_0, y_0, z_0 . En regroupant les termes on obtient l'approximation suivante⁴ :

$$R = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \varepsilon. \quad (1)$$

4. (2 points) Donnez les expressions que le développement de Taylor a déterminé pour les β_i . Ces expressions correspondent-elles numériquement à celles que la régression statistique ci-haut vous indique ?

Pour tester les modèles linéaires (1), vous utiliserez les simulations suivantes.

5. (5 points) Vous simulerez des uniformes de mêmes largeurs, disons 5, et de moyennes μ_X, μ_Y, μ_Z pour les 3 coordonnées orthogonales, et calculerez R . Disons une vingtaine puis une centaine d'observations pour chacune des coordonnées. Dans un premier temps, pour chacune des deux tailles échantillonnales, vous choisirez d'abord des moyennes non nulles mais égales, disons assez loin de 0, puis vous les réduirez, en quelques essais, vers 0. À la limite vous prendrez des uniformes de moyennes égales nulles. Que constatez-vous sur les valeurs des β_i (sont-ils conformes à la théorie ?), et des coefficients globaux de détermination R^2 ?
6. (4 points) Recommencez pour des coordonnées uniformes de moyennes différentes. Faites quelques essais. Pour chacun de ces cas, vous examinerez les modèles linéaires (1) déterminés. Que constatez-vous sur les coefficients de détermination R^2 ? Les valeurs des β_i sont-elles conformes numériquement à ce que prévoit la théorie issue du développement de Taylor ?
7. (2 points) D'où peuvent venir les différences entre les β_i « expérimentaux » et ceux prévus par la théorie, si vous en constatez, dans les deux questions précédentes ?
8. (5 points) Que concluez-vous de cet exemple sur la possibilité de modèles linéaires polynômiaux dans les divers facteurs d'influence à approcher des réponses, *i.e.* des variables dépendantes ? Même si les « réponses » sont des fonctions complexes (non linéaires, *etc.*) des facteurs d'influence. Indiquez les conditions de régularité des réponses en fonction de facteurs influents qui sont cruciales à cet égard ?

⁴En réalité, on utilise comme centre du développement les moyennes des variables x, y, z , pour l'aisance des simulations, mais les conclusions sont valides pour tous les centres possible du développement.

3.2 Le modèle de Taylor (30 points)

Nous revenons maintenant à la modélisation du temps critique T en fonction des variables d'influence V, F, P

Il existe plusieurs modèles prédictifs pour le temps critique, le plus simple étant le modèle de F.W. Taylor⁵

$$T = CV^\gamma . \quad (2)$$

On doit déterminer les paramètres C et γ pour prédire le temps d'usure critique T à la vitesse V .

1. (2 points) Obtenez une linéarisation du modèle (2) qui permette d'utiliser la régression linéaire simple usuelle. Écrivez le modèle statistique avec les hypothèses associées.
2. (3 points) Commentez sur l'ajustement de ce modèle de régression aux données.

Au vu des résultats décrits à la question précédente, l'expérimentateur est allé aux archives et il a constaté qu'en réalité il y avait deux types d'usure à l'œuvre dans les plaquettes. Le premier type s'appliquait aux plaquettes : 1, 2, 7, 11, 13, 14, 15 ; le second aux autres.

3. (1 point) À l'examen des résidus de la régression sur toutes les données, indiquez comment se fait le partage des deux types de plaquettes.

Le fonctionnement de l'outil s'effectuera dorénavant en examinant la plaquette après les premières minutes d'usure pour en déterminer le type d'usure. Puis, cela étant connu, et la vitesse du tour étant elle aussi connue, l'opérateur saura à quel temps remplacer la plaquette, en utilisant de la façon suivante les résultats des essais.

4. (5 points) Seriez-vous prêt à croire, sur la base des résultats des régressions pour chacun des types d'usure, qu'à 300 TPM le temps critique moyen est supérieur pour les plaquettes du second type ?

⁵Il ne s'agit nullement ici du mathématicien anglais Brook Taylor [1685-1731] de l'époque de Newton, celui du polynôme d'approximation qu'on vient d'utiliser, mais plutôt de Frederick Winslow Taylor [1856-1915], un ingénieur et économiste américain qui fut l'inventeur des aciers à coupe rapide, mais aussi, ce pour quoi il est surtout connu, de l'organisation scientifique du travail industriel (travail qu'on appelle parfois de façon réductrice le travail à la chaîne), qu'on nomme depuis le taylorisme.

5. (3 points) Expliquez en mots le sens du quantile $T_{0.1}$, en termes du dépassement du temps d'usure critique.
6. (3 points) Expliquez comment utiliser les intervalles de prédiction unilatéraux de $\ln(T)$ pour estimer les quantiles de T , disons par exemple $T_{0.1}$, pour les plaquettes de type 1 et 2, à la vitesse de 1000 TPM.
7. (3 points) Prenez-vous plus ou moins de risque à utiliser un tel intervalle de confiance de niveau moins élevé, en ce qui concerne le dépassement du temps critique pour une plaquette ?
8. (5 points) Croyez-vous qu'il conviendrait d'utiliser des intervalles de tolérances pour les temps d'usure critique plutôt que des intervalles de prédiction ?

Pour récupérer le sigma d'une *prédiction* à une valeur non observée de la régression, on peut procéder de la façon suivante. À un niveau donné $1 - \alpha$, on calcule un intervalle de *prédiction* bilatéral par une formule⁶ :

$$[L; U] = \widehat{y(x^*)} \pm T_{k,p} \hat{\sigma},$$

où $p = 1 - \alpha/2$, $T_{k,p}$ est le quantile p de la loi de Student appropriée, et $\hat{\sigma}$ est l'écart type de la prédiction. Les logiciels donnent l'intervalle, dont l'étendue donne $2T_{k,p}$ fois le sigma recherché.

9. (2 points) Faites le raisonnement mathématique de cette affirmation, *i.e.* donnez l'équation qui donne $\hat{\sigma}$.
10. (3 points) Utilisez le $\hat{\sigma}$ ainsi déterminé pour obtenir un intervalle de tolérance (unilatéral ou non, à vous de choisir en vous reportant aux raisonnements précédents ; vous choisirez aussi le niveau de cet intervalle et sa couverture) pour le temps critique à 600 TPM et les plaquettes de type 1. Précisez vos hypothèses.

Note : On pourrait construire ainsi des abaques des tolérances en fonction d'une plage de vitesses courantes V pour une couverture et une confiance prescrites.

4 Deuxième série d'essais

On verra dans cette partie du devoir des éléments de planification statistiques d'expériences. Cette technique est très importante dans la pratique du

⁶On l'écrit ici en termes du manuel : *cf.* Tableaux 11.9 et 11.12.

génie surtout pour déterminer des conditions optimales (ou quasi optimales) de production. Mais d'abord une généralisation de la loi de Taylor et des données qui serviront d'exemple jusqu'à la fin du devoir.

4.1 La loi de Taylor enrichie (10 points)

On trouve dans la littérature une loi parente de la loi de Taylor, dite la *loi de Taylor enrichie*. Kalpakjian [5] cite les valeurs suivantes des constantes pour divers types d'outils :

$$T = C V^{\gamma} F^{\delta} P^{\rho} . \quad (3)$$

Outil	γ	δ	ρ
conventionnels	-6.67	-1	-5
au carbure	-2.5	-1	-5
de céramique	-1.67	-1	-5

Dans un article récent Astakhov *et al.* [1], les auteurs rapportent les données (cliquer à droite pour obtenir le fichier *Taylor-enrichie.xls*) d'une expérience contrôlée où on a fixé les valeurs hautes et basses des trois variables V, F, P , qu'on recode, ce sont les variables VR, FR, PR , en +1 et -1 dans le fichier, la valeur 0, dite du centre (ou de base), étant située aux points milieux de diverses variables :



Variable	V	F	P
haute	200	0.200	4.5
centre	125	0.125	2.5
basse	50	0.050	0.5

Dans cette expérience planifiée, on a répliqué chacun des essais 4 fois : on obtient ainsi 32 observations aux valeurs hautes et basses, et 4 aux valeurs du centre pour un total de 36. En principe, on a réalisé ces 36 observations dans un ordre au hasard (on appelle cela la *randomisation* des essais) afin de répartir les facteurs non contrôlés, assimilés à des sources d'erreurs, au cours des divers essais. Cela toutefois n'est pas toujours possible à cause des contraintes industrielles : les coûts sont souvent bien moindres lorsqu'on peut garder certains ajustements fixés le plus longtemps possible, plutôt que de les changer presque tous d'essais en essais.

Dans le fichier des données, on trouvera aussi des transformations de facteurs en valeurs -1, 0, +1 qu'on expliquera plus loin.

1. (3 points) Effectuez une transformation linéarisante de (3), donnez l'équation du modèle statistique associé, faites-en l'analyse complète.
2. (4 points) Le γ cité par Kalpakjian pour les outils de céramique est-il compatible avec celui que vous obtenez ?
3. (3 points) La valeur prédite par la loi de Taylor enrichie aux nœuds de la régression $V = 125$ TPM, $F = 0.125$ mm/T et $P = .5$, confirme-t-elle celle obtenue par le modèle de Taylor que vous avez estimée pour les plaquettes de type 1 dans la première partie du devoir ?

4.2 Un peu de planification d'expériences (15 points)

C'est la pratique courante dans la planification statistiques des expériences de fixer au départ les valeurs extrêmes des facteurs (variables) d'influence sur la réponse qu'on vise à modéliser, puis d'effectuer une transformation affine pour chacun de ces intervalles dans l'intervalle $[-1; +1]$, la valeur centrale (ou de base), lorsqu'elle est utilisée, est située au milieu des intervalles de facteurs et est « envoyée » sur 0.

Planifier une expérience consiste à fixer dans ce référentiel transformé les valeurs de facteurs où on fera les essais. En réalité, on choisit une *matrice* X des essais dans des catalogues de *plans d'expériences*. Chaque ligne de cette matrice donne les valeurs recodées des facteurs où on doit réaliser un *essai*. Ces matrices n'utilisent que les valeurs -1, +1 et éventuellement 0.

Par exemple, dans l'expérience à trois facteurs qu'on utilise ici (voir le fichier des données), la ligne de la matrice des essais $(1, -1, -1)$ indique à l'expérimentateur qu'il doit déterminer la valeur de la variable réponse aux valeurs respectivement maximum, minimum et minimum des facteurs, soit, ici, à $V = 200$, $F = 0.050$, $P = 0.5$.

La raison de la transformation affine de l'espace réel des facteurs sur le pavé $[-1; +1]^m \subset \mathbb{R}^m$ — m est le nombre de facteurs d'influence, dits les facteurs principaux —, est que la matrice des essais donne dans la régression linéaire aux moindres carrés usuelle sur ce pavé des estimés des coefficients qui ont des propriétés statistiques remarquables en vue d'assurer une estimation avec le moins de problèmes possibles. Ainsi la matrice X de l'expérience est souvent orthogonale, *i.e.* que $X'X$ est diagonale. Les coefficients ont alors la propriété intéressante de fournir des β_i indépendants et de variances minimales.

Nous n'entrerons pas dans les détails mathématiques de la technique des

plans d'expériences⁷ Nous nous contenterons d'en expliciter les principes les plus simples.

Les valeurs extrêmes sont en fait les conditions minimales et maximales où on pense qu'on peut faire varier les valeurs des facteurs dans les conditions de la production. On fait des expériences planifiées selon des principes statistiques pour minimiser le nombre d'essais à effectuer (on veut minimiser les coûts...) tout en obtenant l'information la plus complète possible.

Bien évidemment, on a dû déterminer au préalable les facteurs d'influence sur la réponse, éventuellement en faire un choix pertinent. Il est impossible en effet, en situation industrielle, d'examiner l'influence de grandes quantités de facteurs sur une réponse : on doit procéder à un tamisage préalable, se fonder sur les connaissances du passé, pour réduire les facteurs contrôlés au strict minimum.

On peut penser, après avoir sélectionné les facteurs d'influence, que si on veut connaître une approximation de la réponse définie sur cet espace des facteurs, il faut faire une grille de cet espace, en fait un pavé de \mathbb{R}^m où m est le nombre de facteurs, ou encore, en variables transformées, une grille du pavé $[-1; +1]^m$, et faire des essais à tous les points de la grille. Cela se peut, mais représenterait une expérience irréalisable en situation industrielle.

On utilise la théorie des modèles linéaires dont les variables explicatives sont les facteurs en coordonnées transformées, pour expliquer la variable de réponse. Un des objectifs est souvent de déterminer les valeurs de facteurs qui optimisent (minimisent ou maximisent) la réponse.

La théorie des plans d'expériences permet de réaliser des expériences aux seuls sommets de $[-1; +1]^m$, éventuellement à l'origine et en quelques autres points particuliers bien choisis. Plutôt que d'utiliser un modèle physique qui décrit la réponse en fonction des facteurs, on utilise alors un modèle polynômial de la réponse en fonction des facteurs, comme dans la première partie du devoir (« un hors-d'œuvre »).

1. (2 points) Donner la raison mathématique justifiant cette modélisation en vous basant sur les explications que vous avez fournies dans la première partie de ce devoir (le hors-d'œuvre).
2. (2 points) Donnez l'équation affine ($y = ax + b$) qui permet de recoder chaque variables d'origine en -1 pour le minimum et +1 pour le maximum, et donc de passer du pavé d'origine au pavé $[-1; +1]^m$. Ce recodage permet-il de retrouver pour tout point du pavé $[-1; +1]^m$ le

⁷Le lecteur intéressé pourra se reporter à la référence élémentaire de base : Pugh [7], Clément [2], ou encore de façon beaucoup plus complète [6, 3].

point en coordonnées d'origine⁸ ?

4.2.1 Les plans factoriels complets.

Dans les cas où on n'a pas beaucoup de facteurs, on peut penser faire des essais à tous les sommets du pavé $[-1; +1]^m$. Ce nombre grandit assez vite, et devient impraticable pour des m supérieurs à 6 ou 7. Il faut alors recourir à des plans fractionnaires qu'on ne décrira pas ici [8, 2].

3. (2 points) Combien d'essais au minimum un plan factoriel complet avec m facteurs demande-t-il ?

On écrit le modèle statistique qui ne comprend que les m facteurs x_i (dits principaux) de la façon suivante :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m + \varepsilon$$

4.2.2 Les interactions.

Il peut arriver que des facteurs principaux aient une *interaction* influente sur la réponse. Par interaction entre deux facteurs, ou *interaction du premier ordre*, on entend un *effet* différent pour le premier, quand on passe de -1 à +1, selon que le second est à -1 ou à +1. Un graphique fera comprendre le concept. Dans la figure suivante (Fig. 2), on représente en abscisse le facteur 1, en ordonnée la réponse y . Les valeurs de la réponse sont donc les points du plan cartésien. On lie par des droites les valeurs de la réponse pour le passage de -1 à +1 du premier facteur. On suppose que les effets des facteurs 1 et 2, en eux-mêmes, sont notables : la réponse change de façon *significative* lorsqu'on passe de la valeur -1 à +1 pour chacun d'entre eux⁹. Mais dans le cas A, l'effet du passage de -1 à +1 pour le facteur 2 est le même lorsque la facteur 1 change de -1 à +1 : on dit qu'il n'y a pas d'interaction des deux facteurs. Dans les cas B et C au contraire, le changement à la réponse du facteur 2 lors de son passage de -1 à +1 est différent selon la valeur du facteur 1 : on voit une synergie pour B, un antagonisme pour C.

Dans les cas B et C, on parle d'une interaction d'ordre 1 des deux facteurs. Si les facteurs sont notés x_1, x_2 , l'interaction vient de la nouvelle variable

⁸On comprend que l'expérimentation statistique permet souvent, c'est son objectif principal, de trouver les valeurs dans le pavé $[-1; +1]^m$ qui optimisent la réponse, valeurs qu'il est nécessaire de rapporter au pavé d'origine.

⁹Il arrive parfois qu'il y ait un effet d'interaction mais pas d'effet principal pour un ou les deux facteurs principaux de l'interaction.

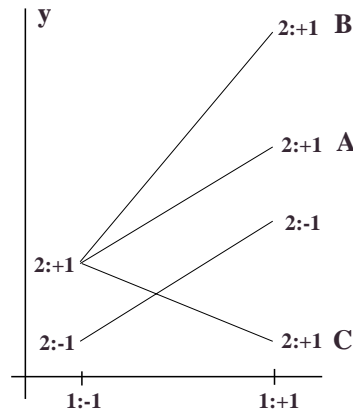


FIG. 2 – Illustration des interactions possibles entre 2 facteurs.

prédictive x_1x_2 . Similairement, on peut parler d'une interaction d'ordre 2 de 3 facteurs, *etc.*

Pour un *modèle statistique linéaire complet du premier ordre* à deux facteurs x_1 et x_2 potentiellement influents sur la réponse y , on a l'équation suivante

$$y = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_{12}x_1x_2 + \varepsilon.$$

Il comprend donc les facteurs principaux et les interactifs d'ordre 1. Le coefficient β_{12} , s'il est présumé non nul, renvoie à une interaction d'ordre 1 significative des deux facteurs. Similairement, des valeurs présumées non nulles pour β_1 ou β_2 renvoient à des effets principaux significatifs. On a donc 4 coefficients à estimer et à tester, et pour pouvoir le faire il faut au moins 5 essais. Mais lorsqu'on utilise un plan factoriel, la valeur de β_0 est invariable : $\beta_0 = \bar{y}$, ce qui permet d'estimer tous les coefficients avec seulement 4 essais. En général, si on veut estimer un modèle factoriel avec k coefficients, on doit avoir au moins $N \geq k$ essais¹⁰.

4. (3 points) En général, dans le cas de m facteurs principaux, on a combien d'interactions de tous ordres, y compris les facteurs principaux ? En comptant β_0 , cela donne un modèle statistique avec combien de coefficients à estimer ? Combien faut-il alors d'essais pour pouvoir estimer tous ces coefficients ?
5. (2 points) Un plan factoriel complet permet-il d'estimer le modèle complet du premier ordre ?

¹⁰Si on utilise le module de *Régression multiple*, on doit avoir $N \geq k + 1$, mais les modules spécialisés en planification et analyse d'expériences statistiques n'en demandent que $N \geq k$.

Les modèles de régression qui sont à la base des calculs montrent qu'un plan factoriel complet non répliqué, *i.e.* où chacun des essais n'est effectué qu'une seule fois, permet bien d'estimer le modèle complet comprenant les facteurs principaux et les interactions de tous ordres comme vous l'avez expliqué ci-haut), mais il ne reste alors *aucun* degré de liberté pour estimer la variance $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ de ε . On ne peut alors l'estimer... On peut toutefois penser simplifier le modèle présumé, enlever des facteurs ou des interactions à estimer, ou encore ajouter des essais à des nœuds bien pensés...

6. (2 points) Quelle est la raison mathématique qui fait que les interactions d'ordre supérieur à deux, $x_i x_j x_k \dots$, sont souvent négligées, et donc qu'on peut supposer que les $\beta_{ijk\dots}$ sont présumés nuls avant même d'utiliser les conclusions des régressions¹¹ ?

La réplication des essais permet cependant de mieux estimer les coefficients, d'en estimer un plus grand nombre, ou encore d'estimer $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ avec plus de précision, mais une autre façon d'arriver aux mêmes fins consiste à ajouter des points centraux aux plans d'expérience, *i.e.* des points à l'origine du cube $[-1; +1]^m$. Ces observations au centre du cube permettent de surcroît de vérifier à peu de frais le manque de linéarité des modèles estimés. Bénéfice non négligeable.

7. (2 points) Expliquez cette assertion en utilisant un exemple d'un modèle linéaire simple $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon$ pour expliquer une réponse y qui comprend un terme quadratique de la variable explicative. Faire un graphique permet d'expliquer simplement.

4.3 Retour aux données (20 points)

Vous noterez que l'expérience dont les données sont rapportées au fichier *Taylor-enrichie.xls* est une expérience factorielle complète à 3 facteurs, répliquée 4 fois, avec aussi 4 répliqués au centre.

1. (6 points) Faites l'analyse du modèle statistique complet du premier ordre. Vous travaillerez dans le cube en coordonnées transformées : $[-1; +1]^m$. Vous devrez créer les variables d'interaction du premier ordre, et répliquer 3 fois la « matrice expérimentale » pour créer la matrice des données avec 36 observations de la réponse qui sera analysée

¹¹Encore une conclusion presque évidente de la première partie — le hors-d'œuvre — du devoir.

par le module de régression du logiciel. Vous devriez constater que les résidus ne sont pas satisfaisants (explication requise).

Une façon de régulariser les résidus est de transformer la variable de réponse. Vous pensez naturellement utiliser la transformation logarithmique à cause des lois de Taylor décrites plus haut.

2. (6 points) Faites l'analyse complète du modèle avec les interactions du premier ordre, mais sans les 4 valeurs des réplifications au centre du cube. Tirez de votre analyse le modèle optimal.
3. (8 points) Avec ce modèle, faites les prédictions des valeurs au centre du cube (à noter qu'elles n'ont pas été utilisées pour l'analyse). Pouvez-vous inférer de la comparaison aux valeurs expérimentales au centre que le modèle linéaire semble valable, *i.e.* qu'il n'y a pas de manque de linéarité flagrant du modèle trouvé au numéro précédent ?

Références

- [1] Astakhov *et al.*, 1997 : *Statistical design of experimental cutting*. Journal of Testing and Evaluation, vol. 25(3).
- [2] Bernard Clément, 2000 : *Design and Analysis of Experiments*. Montréal : Génistat Conseils. 98p.
- [3] Jean-Jacques Dreesbeke, Jeanne Fine & Gilbert Saporta, éditeurs, 1997 : *Plans d'expériences. Applications à l'entreprise*. Paris : Éditions Technip.
- [4] S. Gosh, 1990 : *Statistical Design and Analysis of Industrial Experiments*. New York NY : Marcel Dekker.
- [5] Serope Kalpakjian, 1995 : *Manufacturing Engineering & Technology*. Reading, MA : Addison-Wesley.
- [6] Donald J. Wheeler, 1988 : *Understanding Industrial Experimentation*. 2^e édition. Knoxville Tennessee : SPC Press.
- [7] C. Allen Pugh, 1994 : *Industrial Experiments without Statistical Pain*. Milwaukee, WI : ASQ Quality Press.
- [8] Richard F. Gunst & Robert L. Mason, 1991 : *How to Construct Fractional Factorial Experiments*. Milwaukee, WI : ASQ Press. 96p.



FIG. 3 – Un tour. Vue générale.

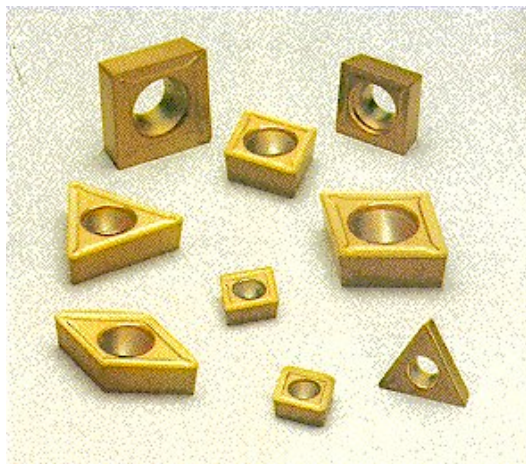


FIG. 4 – Diverses plaquettes.