

# Fiabilité

## Petits développements & exercices

Marc Bourdeau

Supposons que la durée de vie d'un système donné, ou le TBF, le temps de bon fonctionnement, suive une loi  $T$ , de densité  $f$  et de cumulative  $F$ .

### Définition.

Pour  $t > 0$ , on définit  $R(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$ . C'est la *fonction de fiabilité* de ce système, la probabilité que le système fonctionne encore au temps  $t$ .

### Les premiers concepts sur la fiabilité, le risque.

- (a) Soit  $N$ , le nombre de tels systèmes en marche au temps initial. Que représente le nombre  $N \times R(t)$  pour  $t > 0$ ?

*Indice* : pensez à un modèle binomial approprié.

- (b) Donnez une interprétation en mots à la quantité

$$N \times \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t}.$$

*Indice* : prenez un exemple avec des nombres pour raisonner, et utiliser l'item précédent (1a).

- (c) Donnez une interprétation en mots à la fonction  $h(t) \equiv -R'(t)/R(t)$ .

*Indice* : multipliez au besoin numérateur et dénominateur par  $N$ , et utilisez les deux items précédents (1a, 1b).

- (d) Calculez la fonction  $h(t)$  pour  $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$ . Comment interpréter ce résultat ?

**La courbe en baignoire.** Il ressort des calculs précédents que la fonction de défaillance,  $h(t)$ , d'un TBF exponentiel est constant dans le temps. Cela n'est pas toujours très réaliste... En réalité, le vieillissement a plutôt les caractéristiques suivantes : en début de vie, on trouve une sorte de « mortalité infantile », ou encore une *période de rodage*, où les défauts rédhibitoires au bon fonctionnement se manifestent dès l'entrée du jeu, et le taux de défaillance est d'abord élevé puis diminue progressivement. Suit une période plus ou moins longue où le taux de défaillance est à peu près constant : c'est une période de vieillissement exponentiel. Enfin, à l'approche de la « mort », on observe un taux de défaillance croissant.

La courbe d'une fonction de défaillance typique est ainsi en forme de *baignoire* (voir la Figure 1).

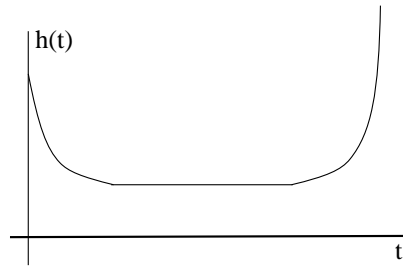


FIGURE 1 – Taux de défaillance typique.

Certains équipements toutefois, tels les composants électroniques, ont des vieillissements à peu près exponentiels sur de très longues durées. La loi exponentielle les modélise ainsi fort bien.

**Redondances active et passive.** On distingue la redondance dite *active* de la redondance *passive*.

Dans la redondance active, on suppose que dans un montage en parallèle, tous les composants sont en fonctionnement en permanence, dès la mise en marche. Dans le cas de la redondance passive au contraire, on suppose qu'un contrôleur permet de passer du premier composant en action au second dès que le premier tombe en panne, le second étant en dormance jusque là (Fig. 2).

Dans les équipements embarqués où la sécurité humaine est primordiale, on considère en général des redondances actives même lorsque cela n'est pas le cas, cela permet de sous-estimer la sécurité véritable, ce qui est bien — quoi qu'il en soit c'est la réglementation qui l'exige. Dans les satellites, et autres équipements embarqués où la sécurité humaine n'est pas en jeu, on peut faire des calculs en considérant vraiment des redondances passives.

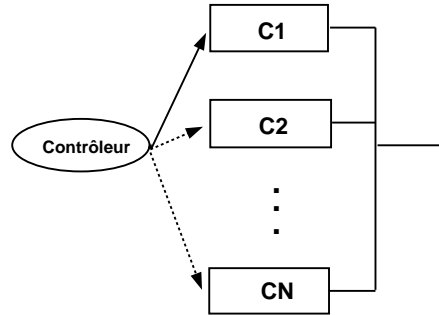


FIGURE 2 – Schéma de la redondance passive. Quand le premier composant C1 vient à défaillir, un contrôleur passe la main à un autre composant de même nature qui commence à fonctionner à ce moment-là, ainsi de suite jusqu'au  $N^e$ .

**Redondances passives.** Dans ce cas, si  $T_i$  est la loi de durée de fonctionnement du  $i^e$  composant identique aux autres et indépendant des autres, la durée de fonctionnement  $T_N$  du système complet est

$$T_N = \sum_{i=1}^N T_i.$$

2. (a) Supposons qu'on utilise un seul composant, et que  $T_1 \equiv T \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Quelle est la moyenne minimale de cette loi de durée de vie pour que  $P(T \geq 1) \geq 0,99$ ?  
L'unité de temps est l'année.
- (b) Supposons que  $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ , quelle est la moyenne et la variance de  $T_N$ , la durée de vie de  $N$  composants connectés en redondance passive? Justifier votre réponse.
- (c) Si  $N$  est assez grand pourquoi peut-on penser que la loi de  $T_N$  est bien approchée par une gaussienne? Justifier votre réponse.
- (d) Supposons que  $\lambda = 1$ , quel est le nombre minimal de composants à monter en redondance passive de sorte que  $P(T_N \geq 1) \geq 0,99$ ? Justifier votre réponse.  
On admettra que ce nombre serait assez grand pour que  $T_N$  fût gaussienne.
- (e) Lorsque ce nombre n'est pas assez grand, on peut se réfugier derrière une des règles de la rareté (Tchébycheff, Gauss-Meidel) pour estimer des intervalles de rareté pour les durées de vie des systèmes en redondance passive.

Dans le cas des redondances passives, il est ainsi possible de calculer les moyenne et les variance de  $T_N$ , si les lois (composants) ont des fonctionnements indépendants, c'est une formule élémentaire, mais la loi d'une somme n'est pas

toujours simple à obtenir. Seul le cas de durées de vie gaussiennes se traite aisément, puisque les combinaisons linéaires de gaussiennes sont encore gaussiennes. Et en fait pour des lois exponentielles, il est possible d'utiliser les lois gamma pour connaître les caractéristiques de rareté des durées de fonctionnement. Mais cela dépasse (pour l'instant) le cadre de notre cours.

**Redondances actives.** Dans le cas des redondances actives c'est la loi de  $T_N = \max_i \{T_i\}$  qu'il faut savoir calculer.

Dans le cas des redondances actives, on voit que l'événement  $\{T_N \leq t\}$  est réalisé si et seulement si  $\forall i : \{T_i \leq t\}$ , et, par indépendance, on peut se tirer d'affaire : la cumulative de  $T_N$  est le produit des cumulatives individuelles, cela peut simplifier un peu les choses... Notamment, encore ici, pour des durées de vie gaussiennes.

**Exercice.** (*Pour les plus aguerris*) Faire un calcul de densité et de cumulative dans le cas où les fonctionnements sont indépendants et ont des durées exponentielles de même paramètre.

### 3. Exercices simples

- (a) Supposons que la durée de vie d'un composant électronique suive une loi exponentielle de moyenne 10 ans. Quel nombre  $N$  suffirait-il de brancher en parallèle, en redondance active, pour s'assurer que la probabilité de fonctionnement du système résultant dépasse 99,9% après 10 ans ?
- (b) Supposons que vous n'avez droit qu'à une redondance (active) d'ordre 2, i.e.  $N = 2$ . Quelle durée de vie moyenne devrait avoir chaque composant pour être assuré de la même fiabilité, c'est à dire pour être assuré à 99,9% que le système soit en fonctionnement au moins jusqu'à dix ans ?
- (c) Supposons que dans un montage, vous ayez 50 de ces systèmes à deux composants en redondance active, et qui fonctionnent indépendamment les uns les autres. Supposons de plus que  $T$ , la durée de fonctionnement de chaque composant de chacun des systèmes suive une exponentielle de moyenne 10 ans. Quelle est la probabilité qu'aucun des 50 systèmes n'ait défailli avant dix ans de fonctionnement ?
- (d) Si vous en avez 5000 sur le même montage, fonctionnant tous de façon indépendante, quelle est la probabilité que le nombre de ces systèmes défaillants avant 10 ans soit situé entre 1 et 10 ?

**La mission Cassini-Huygens.** L'idée de cette mission remonte à 1982. C'est un projet conjoint NASA et ESA. Lancé le 15 octobre 1997 à bord d'une fusée Titan/Centaur, l'atterrisseur Huygens<sup>1</sup> (318kg) porté par l'orbiteur Cassini<sup>2</sup>, (2150kg à vide avec 3132kg de carburant) a finalement atteint le voisinage de Titan, le premier, plus gros (5150km de diamètre; notre lune 3476km), et premier découvert (1655) des satellites de Saturne, au terme d'un voyage de plus de 1,2Gkm le 14 janvier dernier 2005. Après avoir été mis en dormance pendant le trajet qui a duré plus de 7 ans, les instruments scientifiques de Huygens & Cassini ont finalement été activés pour commencer leur mission.

Il a fallu concevoir les instruments de Huygens pour s'assurer qu'ils fonctionneraient *pendant les dernières 24 heures* de sa mission, soit tout au long de son atterrissage sur Titan.

On peut modéliser<sup>3</sup> chacun d'entre eux comme une chaîne de composants. Pour simplifier on admettra que seulement *50 composants* indépendants les uns des autres et « branchés » en série composent chaque instrument de mesure qui est vu comme un *système*. On admettra aussi que les lois de la durée de vie utile pour les composants sont toutes les mêmes, et que ces durées de fonctionnement sont indépendantes les unes des autres.

Attention : dans ce qui suit, comme dans beaucoup de cas en fiabilité, la *précision* des calculs est *cruciale*.

On veut être sûr à 99,5% que chaque instrument (modélisé par un tel système) fonctionne pendant les 24 dernières heures de la mission, celles où ils sont tous activés.

4. (a) Cette certitude revient à demander qu'on observerait une panne d'un tel instrument de mesure en moyenne tous les combien de missions, sous hypothèse bien sûr d'indépendance des missions ?

---

1. Christiaan Huygens [La Haye 1629 – *id.* 1695]. Il a réalisé ses principaux travaux à Paris où il résida de 1666 à 1680 protégé par Colbert. Il est l'auteur du premier exposé complet du calcul des probabilités, *Tractatus de rationciniis in ludo aleae* (1655) immédiatement après sa création par Pascal et Fermat (1654); du premier grand traité de dynamique, *Horologium oscillatorium* (1673); l'auteur de la première théorie ondulatoire de la lumière *Traité de la lumière* (1690, mais déjà complété en 1678) qui expliquait la réflexion et la réfraction bien mieux que Newton qu'il avait rencontré à Londres en 1689, et dont les travaux dans cette direction mais avec une théorie corpusculaire, dataient de 1669 — ils n'ont cependant été publiés qu'en 1704 dans son *Opticks*; il découvrit, après avoir perfectionné la lunette astronomique, la rotation et les anneaux de Saturne, de même que Titan son principal satellite (1655); il inventa le pendule pour réguler les horloges (1656), le ressort spiral pour les montres (1675).

2. Giovanni Domenico — Jean-Dominique — Cassini [Perinaldo près de Nice, alors appartenant à la République de Gênes, 1625 – Paris 1712], dit Cassini 1<sup>er</sup>, premier membre d'une célèbre famille de quatre générations d'astronomes et de géodésiens français. Il vint s'installer à Paris à l'invitation de Colbert (encore lui!). Il a découvert la « division de Cassini » dans les anneaux de Saturne ainsi que plusieurs de ses satellites; il fut le premier à confirmer en 1683, en mesurant des arcs du méridien passant par Paris pour des raisons de cartographie, l'hypothèse de Newton concernant l'aplatissement de la Terre.

3. Les données ont été simplifiées aux fins de l'illustration du concept.

- (b) Quelle doit être la valeur *minimale* de la probabilité,  $p$ , de bon fonctionnement de chacun des composants d'un tel système pour les 24 dernières heures (soit 1 jour terrestre) de la mission ?

Supposons maintenant que les durées de vie utile,  $T$ , de chacun des composants suivent une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . On appelle MTBF la moyenne du temps de bon fonctionnement d'un composant ou d'un système.

- (c) Calculez la valeur de  $\lambda$  de sorte que  $P[T > 1 \text{ jour}] \geq p$ .
- (d) Tirez de ce calcul la MTBF de chacun des composants du système. Exprimez votre réponse en nombre d'années.