

École Polytechnique de Montréal

Mth2301 — Fiabilité

Marc Bourdeau

La durée d'une vie utile

1 Mise en situation : un exemple

Considérons l'exemple suivant. On remplace un composant dès qu'il fait défaut par un autre de même type mais neuf, et ainsi de suite. On suppose que les composants ont des durées de vie indépendantes de moyenne μ , et d'écart type σ .

Soit alors T_i la VA de la durée de vie d'un composant, i.e. le temps à la première panne d'un composant. Puisque les composants ont des durées de vie indépendantes les une des autres, et que chacun a une moyenne μ et un écart type σ , $\sum_{i=1}^K T_i$ est le temps de vie au bout du N^e remplacement, si K est assez grand pour que le théorème central de la limite s'applique, on a évidemment que la loi de T_K est gaussienne et :

$$T_K = \sum_{i=1}^K T_i \sim \mathcal{N}(K\mu, K\sigma^2)$$

Maintenant considérons le nombre de composants N nécessaires pour que la durée de vie du « système » soit au moins de t_0 . N est une VA

N : nombre de composants nécessaires au temps t_0 .

Les événements suivants sont équivalents :

$$\{N > K\} \iff \{T_K \leq t_0\},$$

et donc on peut calculer :

$$P[N > K] = P[T_K \leq t_0] = P\left[Z \leq \frac{t_0 - K\mu}{\sqrt{K}\sigma}\right]. \quad (1)$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} P[N = K] &= P[N \leq K] - P[N \leq K - 1] \\ &= (1 - P[N > K]) - (1 - P[N > K - 1]) \\ &= P[N > K - 1] - P[N > K]. \end{aligned} \quad (2)$$

Nous voici donc en mesure de calculer la loi de N et sa cumulative.

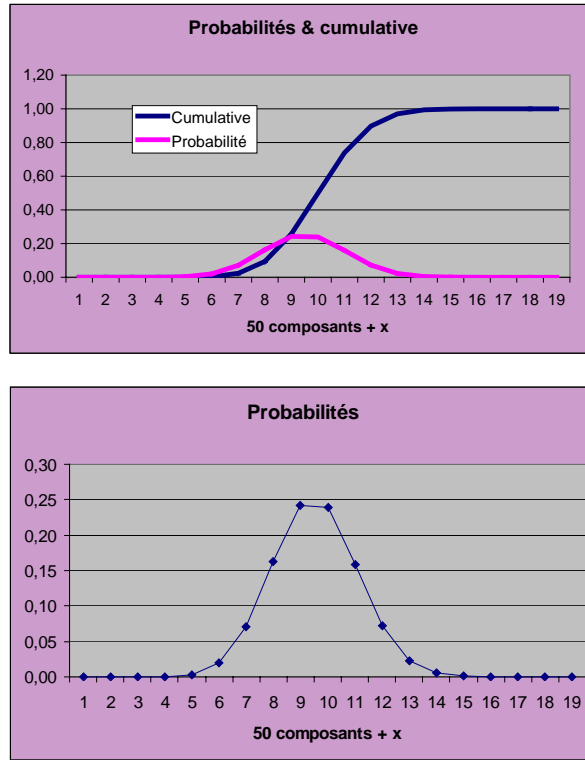


FIGURE 1 – La densité et la cumulative lorsque $\mu = 1000h$, $\sigma = 200h$ ainsi que $t_0 = 60Kh$ pour les redondances avec K de 51 à 70.

2 Un peu de fiabilité

La situation précédente n'a pas vraiment d'applications réelles, c'est un exemple dit d'école. Mais on peut s'en servir pour présenter les concepts de redondance passive pour augmenter la fiabilité des systèmes, ce que nous verrons à la section suivante.

Dans la pratique on veut s'assurer que la durée de vie, disons pour simplifier, le temps à une panne d'un système, dépasse une certaine valeur avec une probabilité élevé.

Ainsi, pour un système embarqué, en tout cas là où une réparation est impossible, et qu'il vaut mieux que le système fonctionne car une réparation est impossible, il est important d'être assuré du bon fonctionnement pendant le temps vie nécessaire à l'accomplissement d'une tâche.

Définition. La *fiabilité* est l'aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions données pour une période de temps donnée (Chapouille, p.6).

Pour bien faire voir les difficultés qui se posent concrètement, considérons un système dont la durée de vie qui est une variable aléatoire suit une loi exponentielle :

$$T \sim \mathcal{E}(\lambda).$$

Les lois exponentielles sont fréquentes dans la description de la majeure partie de la vie des systèmes : après bien sûr la mortalité infantile, et avant la période de la vieillesse où les caractéristiques de vieillissement des systèmes changent rapidement ¹...

Définition. Soit T la VA de la durée de vie d'un système. La fiabilité au temps t de ce système est la quantité $R(t) \equiv P[T \geq t]$. Il s'agit donc du complémentaire à 1 de la cumulative : $R(t) = 1 - F_T(t)$. Et c'est la probabilité que le système fonctionne encore au temps t .

1. Les « citrons » sont rapidement éliminés (période de rôdage qui les élimine) et les « vieux tacots » mis à la casse.

L'espérance du temps de bon fonctionnement d'un système, sa moyenne s'appelle la *MTBF*. Ainsi pour un modèle de bon fonctionnement exponentiel, on calcule :

$$R(t) = e^{-\lambda t}, \quad MTBF \equiv E[T] = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda}.$$

On ne peut jamais être parfaitement sûr de quoi que ce soit, c'est entendu, mais on peut exiger une certaine probabilité de bon fonctionnement d'un système à un temps prescrit.

Exemples.

1. Un système émetteur-récepteur de télécommandes est embarqué sur un lanceur Sa mission doit être assurée pendant les 12 heures prévues pour la mise en orbite d'un satellite avec une probabilité de 99%. Quelle doit être sa *MTBF* ?

Solution. Le calcul utilise la formule plus haut :

$$0,99 \leq R(12) = e^{-\frac{1}{MTBF}12} \iff MTBF \geq 1194 \approx 1200h.$$

Soit 100 fois le temps prescrit pour une probabilité de survie de 12h de 99%...

2. Si on veut que l'émetteur du satellite fonctionne pendant 10 ans avec une probabilité de 99%, quelle doit être sa *MTBF* ?

Solution. Comme 5 ans correspond à un peu moins de 44000h, le calcul analogue prescrit une *MTBF* d'un peu moins de 4400000h, soit à peu près 500 années...

3. À remarquer qu'un tel système peut être considéré comme un ensemble de n sous-systèmes branchés en série, n assez grand... Et que la probabilité de fonctionnement absolue de l'ensemble est le produit des probabilités individuelles. Supposons que ces dernières sont égales. Si on veut que l'ensemble ait une probabilité de fonctionnement de 99%, quelle est la probabilité de fonctionnement de chacun, qu'on suppose égales entre elles, soit R ?

Solution.

$$R_S = R^n \geq 0,99 \iff R \geq (0,99)^{\frac{1}{n}},$$

ce qui donne avec $n=5$ seulement : $R \geq 0,998$... Et cette fois les valeurs plus haut sont multipliées par 5 !

Ces considérations nous amènent à poser la question : comment s'assurer que les *MTBF* des systèmes aient des valeurs aussi élevées ?

Car il est évidemment impensable de faire l'essai d'un bon nombre des composants en question, suffisamment longtemps pour que les pannes se produisent, et en nombre suffisant pour qu'on soit assuré que l'estimateur des moyennes échantillonnales donne une bonne précision à la véritable *MTBF*...² Et on n'a aucun autre moyen de s'assurer d'une *MTBF* que de faire des essais... La question est de taille, ou plutôt sa réponse !

Mais avant d'aller plus loin dans cette direction, on décrit la technique de la redondance passive, ou branchement en parallèle, qui permet de construire des systèmes avec des très longues *MTBF* à partir de composants bien moins fiables.

À noter toutefois que dans les pires des cas, on n'utilise jamais des systèmes redondants avec plus de 2 ou 3 composants. Et la question précédente reste posée !

3 La redondance passive

Supposons qu'on ait branché en parallèle un certain nombre de composants identiques et indépendants, de sorte qu'advenant la panne du premier composant le relais soit pris par le second qui est en dormance jusque là, ainsi de suite. On augmente ainsi grandement la fiabilité du système, puisque le temps moyen à la première panne du système est multiplié par autant de fois le temps moyen à la première panne qu'il y a composants dans le système.

Dans la pratique on trouve des systèmes redondants ayant quelques composants, de l'ordre de deux ou trois, dépendamment de la sécurité qu'on attend du système. C'est à dire de la nécessité d'assurer son fonctionnement pendant des temps prescrits. Ainsi dans les avions, on veut pouvoir se rendre au prochain atterrissage avec une probabilité très élevée.

2. Remarquons à cet égard qu'une moyenne de temps de vie qui suivent une loi exponentielle suppose que bien des composants vivent bien plus longtemps que cette moyenne !