

Ingénierie de la qualité

Études de cas

Simuler pour approcher la réalité

Solutions pour la première partie

1. La fonction est $f(U) = a + (b - a)U$.
2. Il s'agit de résoudre pour a et b les équations linéaires suivantes :

$$\mu = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}},$$

dont les solutions sont

$$a = \mu - \frac{\sqrt{12}}{2} \sigma, \quad b = \mu + \frac{\sqrt{12}}{2} \sigma,$$

puis d'appliquer le numéro précédent.

3. Le théorème des fonctions inverses donne le résultat, puisque une fonction strictement croissante (ou décroissante) est injective et que toute fonction injective sur son domaine de définition possède une fonction inverse.

Par ailleurs, une fonction g est croissante si $x_1 \leq x_2 \iff g(x_1) \leq g(x_2)$. Et donc,

$$F^{-1}(y_1) \leq F^{-1}(y_2) \iff F(F^{-1}(y_1)) \leq F(F^{-1}(y_2)) \iff y_1 \leq y_2$$

La première équivalence parce que F est croissante, et la seconde par définition d'une fonction et de son inverse.

4. On calcule le plus simplement du monde...

$$P(F^{-1}(U) \leq x) = P(F(F^{-1}(U)) \leq F(x)) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$

La première égalité par transformation ordinaire de l'intervalle de probabilité, la seconde par définition de la composition d'une fonction et de son inverse, la troisième par définition de la fonction cumulative d'une loi uniforme.

5. On demande d'illustrer le théorème cité avec la définition de F^{-} sur un exemple. Soit X une VA à 3 valeurs x_1, x_2, x_3 de probabilité p_1, p_2, p_3 respectivement. On a donc pour la cumulative :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < x_1 \\ p_1 & \text{pour } x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{pour } x_2 \leq x < x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 & \text{pour } x_3 \leq x. \end{cases}$$

Maintenant, la définition de F^- donne immédiatement pour $u \in [0, 1]$

$$F^-(u) = \begin{cases} x_1 & \text{pour } 0 \leq u \leq p_1 \\ x_2 & \text{pour } p_1 < u \leq p_1 + p_2 \\ x_3 & \text{pour } p_1 + p_2 < u \leq p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Lorsque les u suivent une loi $U[0, 1]$, les intervalles ont leur longueur comme probabilité. Et la loi de la VA associée à F^- est la même que la loi de X .

6. Il est plus facile d'interpréter les diagrammes quantiles-quantiles pour une loi uniforme que pour toutes les autres lois (ou VA). On a donc intérêt à simuler indirectement des lois quelconques à partir de la théorie plus haut, tout en *contrôlant* les lois uniformes générées.

Dans la pratique courante cependant, les lois observées dérivent un peu par rapport au modèle théorique, et les uniformes n'ont pas toujours à être parfaites. On simule donc le plus souvent directement à partir des inverses des cumulatives des modèles, où les valeurs sont des uniformes. Par exemple, on simulera dans Statistica une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ par la formule « =Vexpon(rnd(1), λ) » ; une gaussienne par « =Vnormal(rnd(1), μ , σ) »

7. Il suffit de créer une nouvelle variable contenant des échantillons d'une loi $U[0, 1]$ et de choisir les sujets (unités statistiques) dont la valeur est inférieure à p . Par les propriétés de la densité d'une loi uniforme sur l'intervalle unité $[0, 1]$, on aura évidemment choisi ainsi un sous-échantillon contenant approximativement la proportion p de l'échantillon.

Dans Statistica, on peut créer une variable par l'expression : « =rnd(1) $\leq p$ », qui vaudra 1 si la valeur de rnd est $\leq p$, et 0 autrement.