

# Ingénierie de la qualité

## Études de cas

### Simuler pour approcher la réalité

#### Solutions pour la troisième partie

1. En prenant l'opérateur espérance sur l'équation (1) de l'énoncé on obtient l'équation suivante de l'énoncé. Si on n'en néglige pas le terme à l'ordre 2, on doit noter que  $E([X - \mu]^2) = \sigma_X^2$ , et alors à l'ordre 2 :

$$E(f(X)) \doteq \mu_Y \doteq f(\mu_X) + \frac{f''(\mu_X)}{2} \sigma_X^2. \quad (1)$$

2. Lorsqu'on multiplie l'équation (1) de l'énoncé par elle-même, et qu'on y suit les indications, on trouve<sup>1</sup>

$$Y^2 \equiv f^2(X) = f^2(\mu) + [f(\mu)f''(\mu) + (f'(\mu))^2](X - \mu)^2, \quad (2)$$

et en passant aux espérances, on obtient enfin, à l'ordre 2

$$E(Y^2) \doteq f^2(\mu) + [f(\mu)f''(\mu) + (f'(\mu))^2] \sigma^2. \quad (3)$$

Maintenant, en utilisant la formule de calcul pour les variances, soit en général  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ , sur les résultats précédents, les équations (2) et (3), on obtient aisément à l'ordre 2

$$E(Y^2) \doteq \sigma^2 (f'(\mu)^2 - \frac{f''(\mu)^2}{4} \sigma^2).$$

3. Les numéros 1 et 2 de la première partie du devoir donnent immédiatement la formule  $X = 48.556 + \mathcal{U}[0; 2.887]$ , puisque la moyenne de l'uniforme demandée est de 50, son  $\sigma$  de  $2.5/3 \doteq 0.8333$ . (Les arrondis sont suffisants pour nos besoins.)
4. Notons pour simplifier  $I \equiv I_{\max}$ ,  $I_0, R_0$  les moyennes, respectivement de  $I \equiv I_{\max}$  et  $R$  et  $V_0 = I_0 R_0$ . On calcule aisément maintenant :

$$\frac{\partial V}{\partial R} = I \quad \frac{\partial V}{\partial I} = R \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial I^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial V \partial I} = 1. \quad (5)$$

---

<sup>1</sup>Pour ne pas alourdir les calculs, on pose  $\mu \equiv \mu_X, \sigma^2 \equiv \sigma_X^2$ .

Et alors on a le développement à l'ordre 1 suivant où les dérivées sont calculées au centre du développement  $(R_0, I_0)$  :

$$V \doteq V_0 + I_0(R - R_0) + R_0(I - I_0). \quad (6)$$

On remarque par les calculs (4) et (5) que le seul terme de l'approximation à l'ordre 2 de (6) qui ne serait pas nul est le terme avec la dérivée partielle deuxième mixte. Mais celui-ci est nul lorsqu'on en prend l'espérance par indépendance de  $R$  et  $I$  :  $E([R - R_0][I - I_0]) = 0$ , et donc l'espérance approximative tirée de (6) est valide à l'ordre 3 :

$$V_0 \doteq R_0 I_0.$$

Enfin, la technique décrite et exploitée au numéro 2 s'applique ici à deux variables, et on obtient sans difficulté

$$\sigma_V^2 \doteq I_0^2 \sigma_R^2 + R_0^2 \sigma_I^2. \quad (7)$$

5. Par le théorème de Tchébycheff, l'intervalle de tolérance naturelle de  $V_{\max}$ , soit approximativement  $[347.93; 652.07]$ , a une couverture de 89%. Quelques simulations montrent que  $V_{\max}$  possède probablement une loi unimodale, et donc on peut appliquer le théorème de Camp-Meidel, le même intervalle ayant alors une couverture approximative de 95%.
6. Pour un montage de 3 résistances en parallèles, il y a bien peu de raisons de croire, à la suite d'un bon nombre de simulations de 100 observations de la résistance résultante que celle-ci ne soit pas gaussienne.  
Sur quelques simulations, on obtient une moyenne approximative de 16.66 un écart type de 0.164, ce qui donne une tolérance naturelle approximative de  $[16.17; 17.17]$  pour une couverture de 99.73%
7. Mais avec 1000 et 5000 échantillons de la même résultante, le portrait change. La loi n'est sûrement pas gaussienne. Cette constatation se fait beaucoup plus aisément à l'aide de diagrammes quantiles-quantiles qu'à l'aide d'histogrammes. Voir à cet égard les Figures 1 et 2.  
Avec 5000 échantillons cette constatation est encore plus évidente. Et la loi apparaît avec plus de clarté (Fig. 3).

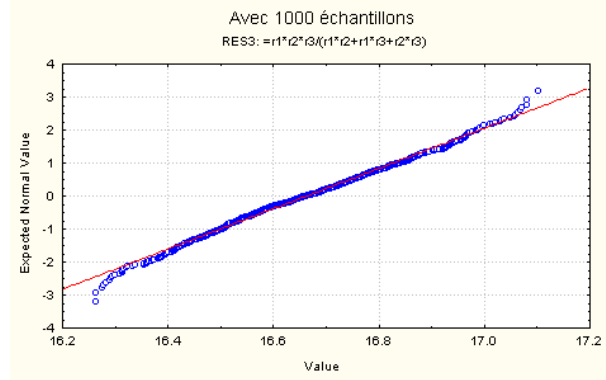


FIG. 1 – Diagramme quantile-quantiles type avec 1000 données.

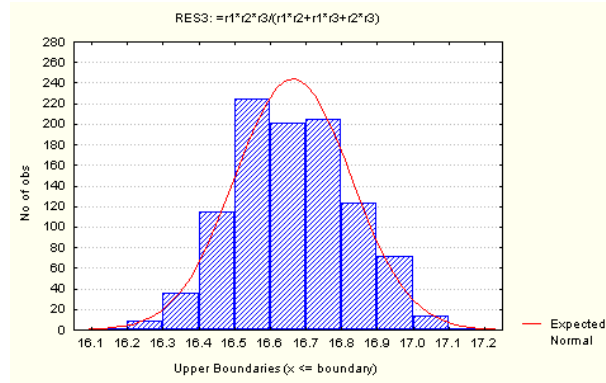


FIG. 2 – Histogramme type avec 1000 données.

8. On a la puissance  $P = RI^2$  avec le maximum du courant valant 10 ampères. Donc  $P = 100 R$ ,  $\mu_P = 100\mu_R$  et  $\sigma_P = 100\sigma_R$ . Les quelques essais de simulations décrits plus haut ont donné :  $\mu_R \doteq 16.66\Omega$  avec un écart type d'environ  $\sigma_R \doteq 0.164$ . Si la loi de  $P$  était gaussienne, le calcul approximatif suivant

$$P(P \geq 2000) \approx P(Z \geq 2.04) \doteq 0.0208.$$

laisserait croire en moyenne à environ 20.8 composants par millier qui dissiperaient trop de courant. Quelques simulations cependant font croire que presque aucun des composants ne dissipera plus de 2000W.

9. Lorsque le courant maximal lui-même est aléatoire, on simulera un certain nombre de fois disons 5000 observations de  $P = RI^2$ , pour en tirer une bonne approximation de ses moyenne et écart type. On obtiendra, par exemple :  $\mu_P \doteq 1680.75$ ,  $\sigma_P \doteq 332.4$ . Et en moyenne, si on se plaçait sous hypothèse de normalité de la puissance dissipée,

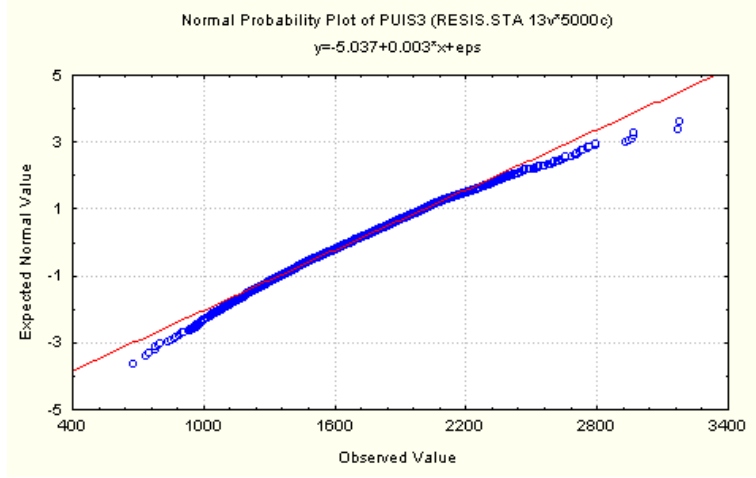


FIG. 3 – Diagramme quantiles-quantiles type avec 5000 observations.

sur 1000 montages on en aurait 168 qui dissiperaient plus de 2000W :

$$P(P \geq 2000) \approx P(Z \geq 0.96) \doteq 0.168.$$

Mais la loi de  $P$  ne peut être confondue avec une gaussienne (Figure 4), et quelques simulations permettront de croire qu'en moyenne environ 170 montages sur 1000 dépasseront la limite de dissipation permise. Soit presque le même nombre.

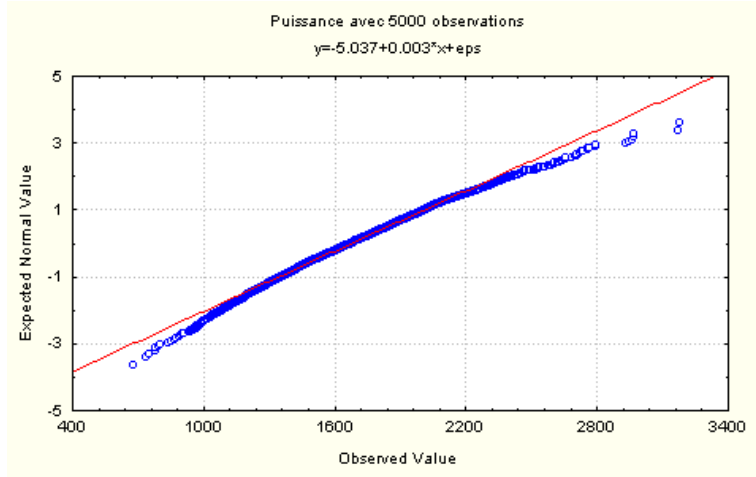


FIG. 4 – Diagramme quantiles-quantiles type pour la puissance avec 5000 simulations.