

Pascal, le libertin

Pascal et la naissance des probabilités

Marc Bourdeau

Blaise Pascal [Clermont-Ferrand 1623-Paris 1662] fut un des créateurs du calcul des probabilités, et, à cet effet, a énoncé les premiers concepts de la combinatoire. Il fut le premier à aborder de manière très générale et mathématique les problèmes du hasard. Il est l'auteur de la première contribution sérieuse et rationnelle au problème du « parti » à prendre en face d'un avenir incertain, ce qui s'appelle aujourd'hui la *théorie de la décision*, et au passage il a mathématisé le concept d'espérance.



FIG. 1 – Seul portrait de Pascal fait de son vivant par son ami Jean Domat vers 1645. L'original est au plomb. On a utilisé ici une version qui a servi pour un timbre.

Blaise Pascal¹ a eu une activité incroyable pour une si courte vie, il est mort en effet à trente-neuf ans. Scientifique, il a révolutionné la physique et les mathématiques ; polémiste, il a attaqué, après s'être « converti » au jansénisme, les ennemis de cette secte dans des œuvres qui sont des classiques du genre, en réalité il a fondé l'écriture moderne de la langue française ; ses *Pensées*, publiées après sa mort, pour faire l'apologie de la religion chrétienne sont une des œuvres les plus lues du Grand siècle ; homme de société, il fut remarqué et apprécié chez les libertins et la haute société. On le crédite de bien des inventions, mais peu savent qu'il a mis sur pied le premier service de transports collectifs à Paris, les « carosses à cinq sols », avec des trajets fixés, des horaires, un prix modique, *etc.* La majeure partie de son œuvre de polémiste fut accomplie dans la clandestinité car le jansémisme, devenu un refuge de dissidents, fut persécuté, il a dû publier sous divers pseudonymes.

En fait, on devrait le reconnaître pour ce qu'il fut réellement, non pas surtout un esprit religieux rigoriste, mais plutôt un homme de conviction, un penseur libre, un rebelle, un grand esprit extrêmement polyvalent et profond, un précurseur des Lumières. Les jansénistes étaient les dissidents de l'époque.

Pascal aurait ainsi commencé par réfléchir sur un fait expérimental que lui aurait rapporté Antoine Gombaud, Chevalier de Méré, libertin notoire, qui, soit dit en passant, le trouvait fort brillant mais plutôt ennuyeux². Celui-ci confia à Pascal qu'il était fort surpris de constater

qu'on a plus d'une chance sur deux de tirer un six avec un seul dé en quatre coups, mais qu'il en faut vingt-quatre pour avoir une chance sur deux de tirer un double six avec deux dés.

C'est le passage de 4 à 24 qui lui semblait déraisonnable, non « logique ».

Méré croyait qu'obtenir (A) au moins un 6 en jetant un dé 4 fois semblait supérieure à celle (B_{24}) d'obtenir un double 6 en jetant 24 fois 2 dés. En fait, il avait cru expérimentalement que les deux constituaient des paris gagnants, mais son expérience ...de parieur lui avait montré que le deuxième était perdant. Voir plus loin pour le sens des termes *gagnant* et *perdant*.

¹On trouvera une biographie sommaire de Pascal au site suivant [http ://www.infoscience.fr/histoire/portrait/pascal.html](http://www.infoscience.fr/histoire/portrait/pascal.html), ainsi que des témoignages sur sa vie et son œuvre au site [http ://www.alalettre.com/pascal-intro.htm](http://www.alalettre.com/pascal-intro.htm).

²Une partie des considérations historiques évoquées ici proviennent du très intéressant ouvrage de Jacques Attali : *Blaise Pascal ou le génie français*, Paris : Fayard, 2000. On pourra trouver une histoire plus complète dans : Ian Hacking, *The Emergence of Probability*, Cambridge University Press, 1975.

Exercices.

1. En fait, l'affirmation de Méré est vraie pour le 4 (montrer cela), mais il se trompait pour le 24. Déterminer le premier entier n tel que la probabilité d'avoir au moins un double six en ce nombre d'essais de deux dés dépasse 0,5.

Rép.: $P[A] = 1 - (\frac{5}{6})^4 \doteq 0,518$; $P[B_{24}] = 1 - (\frac{35}{36})^{24} \doteq 0,491$; $n = 25$.

2. Dans la première affirmation de Méré, on pourrait dire de façon équivalente « au moins un six avec quatre dés », mais pas « au moins deux six avec quarante-huit dés ». Justifier.

Brin d'histoire des probabilités. C'est sa fréquentation des milieux libertins adonnés notamment aux jeux de hasard, avant sa conversion au jansénisme donc, qui lança Pascal sur ses réflexions sur le hasard. Le terme de libertin au XVII^e siècle qualifie celui qui adopte une distance face aux règles usuelles, tout particulièrement celui qui adopte une attitude de *liberté* (d'où le terme) face aux dogmes et conduites imposées par l'Église qui bien sûr régissait tout... Libertin ne voulait pas dire assez libre de mœurs, acception que le mot a fini par prendre mais seulement à la fin du XIX^e siècle...

Dans le Furetière, dictionnaire datant de 1690, on trouve les deux seules acceptions suivantes au mot libertin : « qui ne veut pas s'assujettir aux loix, aux regles de bien vivre, à la discipline d'un Monastere. Un escolier est libertin, quand il fripe ses classes; quand il ne veut pas obeïr à sa mere; une femme à son mary ». « Se dit aussi à l'égard de la Religion, de ceux qui n'ont pas assez de vénération pour ses mysteres, ou d'obeissance à ses commandements ».

Comment le Chevalier de Méré a-t-il pu expérimentalement observer de si petits écarts à 0,5? C'est à dire en jouant un grand nombre de fois et en examinant la proportion (d'où le terme probabilité) des jeux gagnants. Aurait-on là la première utilisation réelle de la définition *fréquentiste* des probabilités? Probablement pas la première, car en l'absence de toute possibilité de modélisation opérationnelle, *i.e.* mathématique, des phénomènes aléatoires, la seule façon d'avoir une idée quantitative de la probabilité d'un événement donné est de réaliser un grand nombre de fois une expérience dans des conditions d'indépendance des essais, où parmi les résultats on compte la fréquence relative, ou proportion, de la réalisation de l'événement. Cette proportion est une approximation de la probabilité associée à l'événement, qui devient de plus en plus précise lorsque le nombre d'essais augmente. C'est, on le verra toutefois, assez peu pratique. Il s'agit de la définition dite *fréquentiste* d'une probabilité³.

³Mais comment s'y prend-on pour justifier qu'« il y a, disons, 60% des chances pour avoir de la pluie demain »? Peut-on utiliser une approche fréquentiste?

Ainsi, dans la définition fréquentiste des probabilités, la probabilité d'un événement est approchée par la fréquence relative de sa réalisation lors d'un grand nombre d'essais indépendants. C'est la définition la plus naturelle (intuitive ?) de probabilité. Nul doute que Méré avait expérimenté ses idées de pari avant de les pratiquer.

Méré était en effet un parieur très fûté, et il avait déterminé, sans doute expérimentalement, comment faire autrement, que les deux probabilités étaient supérieures à 0,5, lui procurant, aux paris qu'il prenait à ces jeux, un léger avantage de gain. Un trop grand avantage l'aurait évidemment brûlé auprès des parieurs, Méré était très fin : à 3 jets d'un seul dé, en effet la probabilité d'un 6 est inférieure à 0,5, mais s'il veut arrêter à 4, le pari est légèrement gagnant. Il avait cru la même chose pour le second terme, mais c'est à 25 et non 24 que le pari est gagnant. Être gagnant signifie que le *rapport des hasards* du pari devrait être supérieure à 1 pour qu'un parieur fût pariât à un contre un, comme on a vu dans le texte qui amène à celui-ci.

Définition.

La *cote du pari* de probabilité p , ou encore le *rapport des aléas* pour un événement A de probabilité p , noté $CP(A)$, est défini par $CP(A) \equiv p/(1 - p) \equiv p/q$.

On a vu que $P(A) \equiv p_A \doteq 0,518$, $P(B_{24}) \equiv p_B \doteq 0,491$, donnant donc $CP(A) = 1,07$, et $CP(B_{24}) = 0,966$. Mais $CP(B_{25}) = 1,022$. Fûté, le Chevalier, puisque ce n'est qu'à long terme qu'il était gagnant, et il pouvait gagner sans éveiller les soupçons⁴.

On dit qu'un pari est *gagnant* lorsque sa cote associé est supérieure à 1, *perdant* dans le cas contraire.

Exercices.

3. Calculer l'espérance du pari à un contre un suivant : « je parie que j'obtiendrai un 4 avant 4 jets de dés ». Notons A ce pari. Supposons qu'un parieur veuille parier contre vous 10 unités de la monnaie locale sur A . En moyenne, il vous faudra trouver combien d'autres parieurs

⁴Hélas, il s'était trompé dans au moins une de ses expériences probabilistes... Comme l'a écrit Pascal dans une lettre à Fermat (la correspondance Pascal-Fermat a joué un grand rôle dans l'établissement des concepts de la probabilité) sur un autre sujet, l'existence de l'infiniment petit : « Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Méré : car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre ; c'est, comme vous le savez, un grand défaut. »

pour que l'espérance de votre gain dépasse 100 unités de la monnaie locale ?

4. Supposons donc que le Chevalier ait basé sa conjecture sur un bon nombre d'essais (indépendants), mettons $n = 10$, de réalisations de A (en jetant un dé 4 fois, ou 4 dés) et de B (en jetant 24 fois 2 dés). Quelle est la probabilité que les cotes ou rapports des aléas aient été tous les deux supérieurs à 1, *i.e.* $P(A) \equiv p_A$ et $P(B) \equiv p_B$ soient supérieurs à 0,5) ?
5. Au fur et à mesure que le nombre d'essais augmente, se conforte normalement la conjecture du Chevalier. Même question que la précédente après 30 essais.
6. Quelle est la probabilité qu'après 30 essais \widehat{p}_A soit inférieur à \widehat{p}_B ?
En moyenne, sur 100 séries de 30 essais combien trouve-t-on $\widehat{p}_A > \widehat{p}_B$? En moyenne, il faut combien de séries de 30 essais pour avoir une première fois $\widehat{p}_A > \widehat{p}_B$?
7. Combien d'essais le Chevalier eût-il dû faire pour qu'il fût sûr à 99% que A était gagnant, mais B perdant⁵ ?

Brin d'histoire (suite). Retournons au Grand siècle et aux personnages qui ont fait l'Histoire. On a mentionné que la probabilité avait peut-être vu le jour lorsque Blaise Pascal (1623-1669), à l'époque où, n'étant pas encore converti, il fréquentait les milieux libertins. Ce terme aujourd'hui a un sens qu'il n'avait pas à l'époque. On pourrait probablement soutenir la thèse que les libertins étaient au XVII^e siècle français, ce que les dissidents russes furent à la fin du régime communiste, loin donc du sens que prit le mot aux siècles subséquents.

Le Grand siècle français était brillant on en convient, mais aussi très répressif et extrêmement inégalitaire comme tous les régimes totalitaires qu'ils soient aristocratiques militaires ou mêmes marchands... On sentait souffler un vent de liberté, et le régime se durcissait. D'où une hypocrisie considérable très répandue surtout dans les milieux aristocratiques et instués, et une façon de ruser avec sa conscience qui répugnait à plusieurs dont les jansénistes. La dissidence affichée pouvait coûter très cher... Rappelons la devise de Descartes *Bene vixit qui bene latuit*, « il vit bien celui qui vit caché », et Descartes le fut une bonne partie de sa vie d'exilé.

Antoine Gombaud, Chevalier de Méré [1607-1684], était indifférent en matière religieuse, plutôt désabusé de la Cour et de sa vacuité, il fut un joueur et un séducteur notoire. Il fut tout de même écrivain et moraliste, et il définit dans *La vraie honnêteté* l'art d'être un « honnête homme ». Il définit l'honnêteté comme l'art d'exceller en tout ce qui regarde les agréments et les bienséances de la vie. C'est là une morale exigeante, bien plus qu'il n'y paraît, et Pascal a pu écrire dans *Les Pensées* : « Qu'ils soient au moins honnêtes gens s'ils ne peuvent être chrétiens ! ».

⁵Il va sans dire que les concepts d'espérance (moyenne) d'essais indépendants, de « être sûr à 99% » n'étaient pas encore inventés...

Brin d'étymologie et d'histoire. Le terme probabilité n'avait à cette époque que peu à voir avec le sens technique qu'il a pris par la suite, et Pascal eût été fort surpris de l'utilisation du mot qu'il abhorrait étant lié totalement à l'esprit casuistique des Jésuites qu'il avait si fort combattu (*cf.* Les Provinciales). Il appelait « géomètre du hasard » ce qu'on nomme aujourd'hui la probabilité.

Dans le Furetière (1690), à l'article probabilité on trouve « Apparence de vérité, qualité de ce qui est probable. Il y a bien des paradoxes qui ont pourtant de la probabilité. Un Philosophe ne doit rien avancer qui n'ait quelque probabilité ». À l'époque de Pascal, cinquante ans auparavant, la probabilité est un terme de la théologie morale des cas de consciences, ou casuistique (prônée par les jésuites) : c'est la doctrine des opinions probables. Le mot vient du latin *probare* — approuver —, d'où une opinion probable est synonyme d'acceptable parce qu'approuvée par au moins une autorité religieuse, et qui peut donc servir à fonder un comportement moral ou à tout le moins religieusement acceptable, non source de péché. On trouve de Pascal cette pensée : « Ôtez la probabilité, on ne peut plus plaire au monde ; mettez la probabilité, on ne peut lui déplaire » (Pensées. XXIV, 72, éd. HAVET). Ou encore « Les trois marques de la religion : la perpétuité, la bonne vie, les miracles ; ils [les jésuites] détruisent la perpétuité par la probabilité, la bonne vie par leur morale, les miracles en détruisant ou leur vérité ou leur conséquence » (Pensées XXIII, 28). Dans *Les Provinciales* : « Mon révérend père, lui dis-je, que le monde est heureux de vous avoir pour maîtres ! que ces probabilités sont utiles ! (Prov. VI). « Voilà comment les opinions s'élèvent peu à peu jusqu'au comble de la probabilité » (Prov. XIII). Pour donner un exemple extrême de la *probabilité* prise dans ce sens, dans un écrit célèbre de casuistique publié en 1664 qui compile des travaux de vingt-quatre des ses confrères, le jésuite Escobar y Mendoza écrit qu'on peut tout faire pourvu qu'en pensée on le désapprouve. Ainsi, si on tue avec regret, tous les espoirs de salut restent permis (Attali, *op.cit.* p.228). On peut comprendre la *dissidence* d'un Pascal et de bien d'autres !

D'après le Robert historique de la langue française, le terme probabilité dans son sens technique s'est établi au début du XVIII^e siècle, alors que la dérive casuistique imposée par les Jésuites disparaissait, par retour au sens qu'il a pris dès le XIV^e avec *prouvable* emprunté au latin *probabilis* et *probabilitas* « chance qu'une chose a d'être vraie, raison qui fait présumer qu'elle est vraie ».

Le terme aléatoire, lui, vient du latin *aleatorius* qui apparaît en droit à la fin du XVI^e pour désigner un contrat qui prévoit des conditions liées à la chance. Il dénote tout où peut intervenir le hasard.

Le terme latin *alea* est d'origine inconnue et signifie jeu de dés, puis dés, comme dans la phrase célèbre de Jules César « *alea jacta est* » lorsqu'il a franchi le Rubicon — autre expression célèbre. Les Latins (Romains), peuple particulièrement superstitieux, s'en remettaient souvent au hasard pour justifier leurs décisions, le hasard étant la voix des dieux. D'ailleurs, avant de pouvoir penser à la quantification du hasard, à son examen scientifique, il a fallu justement se débarrasser de la divinité comme régisseur des choses terrestres, aux « voies insondables », ou plus précisément le renvoyer au ciel. Ce fut, en simplifiant un peu, l'œuvre de René Descartes [1596-1650], pour qui Dieu n'a servi qu'à mettre le système en branle : « Je ne puis pardonner à Descartes ; il aurait bien voulu, dans toute sa philosophie, se pouvoir passer de Dieu ; mais il n'a pu s'empêcher de lui faire donner une chiquenaude, pour mettre le monde en mouvement ; après cela il n'a plus que faire de Dieu » (Pascal, *Les Pensées*, 77, éd. Hachette.). En français contemporain, le terme signifie selon le Robert « tour imprévisible que peuvent prendre les événements », comme dans l'expression « les aléas du métier », avec une connotation légèrement défavorable.

Le mot hasard est un emprunt à l'arabe *az-zahr* par l'intermédiaire de l'espagnol *azar*, « jeu de dés », et « coup défavorable au jeu de dés » l'anglais retient ce sens défavorable à *hazard*). Le mot arabe vient de *zahr* ou fleur, les dés ayant porté une fleur sur l'une des faces. En français, hasard a d'abord désigné un jeu de dés (jeu de hasard). Il s'emploie pour « cause qu'on attribue à ce qui arrive sans raison apparente⁶. »

Le mot chance, lui, est apparu vers la fin du XII^e siècle, *chaance* et *caanche*, vient du latin *cadentia* participe présent pluriel neutre de *cadere*, « tomber », action de tomber, et utilisé en latin au jeu des osselets, sorte de jeu de hasard pratiqué avec de petits os et qui remonte à la plus haute antiquité (*cf.* *alea*).

Enfin, le terme dé, est d'origine obscure. Il pourrait dériver du participe passé neutre substantivé du latin *dare*, dont un des sens est « jouer ».

Le jeu donc, encore et partout, constitue la principale voie d'arrivée jusqu'à nous des mots liés au hasard.

⁶On connaît le joli mot de Théophile Gautier [1811-1872] : « Le hasard, c'est le pseudonyme de Dieu quand il ne vaut pas signer. »