

Le pari de Pascal

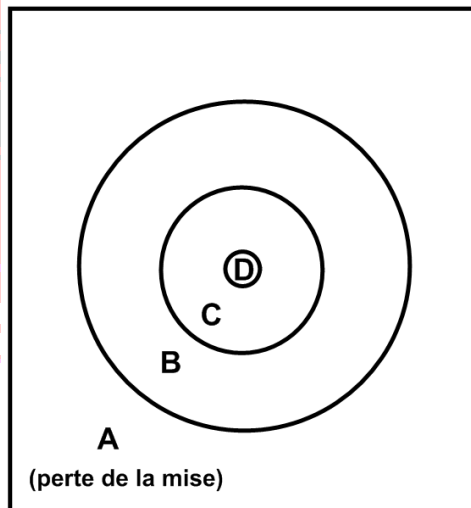
Espérances & espérer

Marc Bourdeau¹

Considérons le jeu de fléchettes suivant (Fig. 1) qu'on trouve dans les foires. On est invité à lancer une fléchette pour une mise donnée qu'on perd (GAIN NÉGATIF) si on lance la fléchette hors cible. Les gains positifs lorsqu'on atteint les diverses régions de la cible sont fixés par l'organisateur du jeu. On suppose que la cible est assez loin... Vous connaissez les gains associés aux régions payantes de la cible.

À la suite d'un entraînement sévère (!), vous êtes parti du scénario I (Voir Tableau 1) pour obtenir de meilleurs résultats aux deux autres scénarios, II & III. Vous chiffrez vos résultats en pourcentages attendus des fois où vous atteignez les diverses régions de la cible.

Figure 1 – La cible. La mise est de 15 unités de la monnaie locale.



¹ Marc.Bourdeau@PolyMtl.ca , consultant statistique.

		Scénario					
		I		II		III	
ZONE	GAIN OFFERT	Nombre espéré de	Sur 100 réussites	Nombre espéré de	Sur 100 réussites	Nombre espéré de	Sur 100 réussites
		en 100 Essais	GAIN ESPÉRÉ	en 100 essais	GAIN ESPÉRÉ	en 100 Essais	GAIN ESPÉRÉ
A	votre mise: -15	60	-900	50	-750	40	-600
B	2	20	40	23	46	20	40
C	5	15	75	21	105	30	150
D	100	5	500	6	600	10	1000

Total espéré de vos gains
en 100 essais

-285

1

590

Gain moyen par essai -2,85

0,01

5,9

C'est votre *espérance*
du jeu

Tableau 1- Trois scénarios qui décrivent votre habileté. Les nombres négatifs sont des pertes. Les proportions en pourcentage des fléchettes qui atteignent les diverses régions sont calculées sur de nombreux essais et sont stables pour chaque scénario.

Compte tenu de votre mise, le Scénario I vous coûte en moyenne 2,85 unités de monnaie : ce serait stupide de jouer.

Les Scénarios II & III vous donneraient des espérances de gains unitaires (par fois où vous jouez) positifs –des valeurs attendues. Le deuxième est à peine «gagnant».

Seul le troisième vaut vraiment la peine, car l'espérance du gain par fléchette vous est nettement favorable, compte tenu de la mise de 15 unités de monnaie.

En général, il convient de parier seulement sur des jeux où l'espérance est positive. Les jeux avec de grandes espérances sont le plus courus, mais ils sont rares...

On définit *l'espérance d'un jeu*, comme sur le tableau 1 par (on utilise '*' pour la multiplication) :

Espérance d'un jeu = Somme des (gain * probabilité de ce gain)

Attention ici, une définition cruciale, celle de **probabilité**.

Pour un événement parmi d'autres qui se réalise avec un certain hasard, avec incertitude, lors d'une expérience sujette au hasard des résultats, on appelle sa **probabilité la proportion attendue en valeur unitaire** (et non en pourcentage) que cet événement se réalise : sur un grand nombre de fois où on réalise la *même* expérience, la probabilité d'un certain événement est la proportion unitaire où il se réalise.

On peut penser que les jeux loteries seraient à espérances positives. Mais il n'en est rien, puisque l'organisation des loteries garde toujours un pourcentage des mises pour ses frais (et bénéfices...), de sorte que le total des lots est toujours inférieur au total des mises.

Un jeu à deux résultats

Supposons pour simplifier qu'une loterie offre un gain de **G** unités de monnaie, la valeur du lot, avec une probabilité **p**, pour une mise de **M** que vous perdez avec une probabilité **(1-p)**. L'espérance de ce pari est alors, suite à la formule ci-haut :

$$\text{Espérance} = G * p - M * (1-p).$$

On conçoit que si le gain **G** est assez grand, pour une *mise invariable* **M**, l'espérance sera positive même pour des **p** petits. D'autant plus grande d'ailleurs que **G** sera grand : une probabilité **p** de gagner même très petite sera compensée par la grandeur du gain attendu.

C'est pourquoi les loteries sont très populaires : les principaux lots sont tellement grands, de l'ordre du salaire total de plusieurs dizaines de vies! Et les mises tellement ridicules devant ce gain éventuel (même de probabilité très petite, ce qui n'est pas tenu en ligne de compte dans l'esprit des parieurs, ces concepts sont pour les savants)... On promet le paradis sur terre, pour le prix d'un demi-kilo de viande, ou quelques verres...

On comprend aisément que les gouvernements qui tirent un profit (mais très contrôlé tout de même) ne sont pas près de faire disparaître ces *taxes volontaires*...

Ce jeu des gains contre les probabilités de les obtenir, pour une mise fixe, sont explicités aux Tableaux 2 & 3.

probabilité fixe				
GAIN	P	MISE	1-p	ESPÉRANCE
10	0,0001	5	0,9999	-4,9985
100	0,0001	5	0,9999	-4,9895
1000	0,0001	5	0,9999	-4,8995
10000	0,0001	5	0,9999	-3,9995
100000	0,0001	5	0,9999	5,0005
1000000	0,0001	5	0,9999	95,0005
10000000	0,0001	5	0,9999	995,0005
100000000	0,0001	5	0,9999	9995,0005
1000000000	0,0001	5	0,9999	99995,0005
10000000000	0,0001	5	0,9999	999995,001

Tableau 2 – Un gain qui augmente continûment finit par rendre positive l'espérance de ce pari, où $p= 0,0001$ est fixe.

probabilités décroissantes				
GAIN	P	MISE	1-p	ESPÉRANCE
10	0,001	5	0,999	-4,985
100	0,0005	5	0,9995	-4,9475
1000	0,00025	5	0,99975	-4,74875
10000	0,000125	5	0,999875	-3,749375
100000	0,0000625	5	0,9999375	1,2503125
1000000	0,00003125	5	0,99996875	26,2501563
10000000	1,5625E-05	5	0,99998438	151,250078
100000000	7,8125E-06	5	0,99999219	776,250039
1000000000	3,9063E-06	5	0,99999609	3901,25002
10000000000	1,9531E-06	5	0,99999805	19526,25

Tableau 3 – Un gain qui augmente continûment finit par rendre positive l'espérance de ce pari, où p lui-même décroît mais moins rapidement.

Maintenant qu'on comprend quelque peu le lien entre les gains, la probabilité de ce gain, pour une mise fixe, on conçoit que l'espérance de tout pari est positive si le gain est assez grand pourvu que la probabilité de ce gain ne devienne pas nulle. Or aucun pari n'est à probabilité p nulle, elle reste toujours positive, même infime.

Le pari de Pascal

On doit ici simplifier l'argumentation de Pascal. Mais l'idée est là. Il faut, dans l'optique de Pascal, susciter la foi par des arguments rationnels qui font aussi appel aux intérêts personnels, dans un langage facile à comprendre.

Reprenons l'équation plus haut :

$$\text{Espérance} = G * p - M * (1-p).$$

La valeur de ***p***, représente la probabilité de l'existence de Dieu, ***G*** représente le gain attendu, disons un gain énorme, soit le paradis quel que soit le contenu qu'on y met, lorsqu'on parie une mise ***M***, soit disons mener une bonne vie.

Mener une bonne vie, ce n'est pas rien, c'est difficile, mais cela en vaut la peine, une bonne vie : n'est-ce là pas un objectif réalisable et éthiquement correct (comme on dirait aujourd'hui)? Préférable à l'autre tout de même, la plupart de gens sont animés de ce désir de vie bonne.

Mais même si ***p*** est infime, tout de même il n'est pas nul, qui sait ce qu'il y a après la mort, personne n'en est revenu... Et on s'entend bien que quel que soit le contenu du paradis, ce gain est, disons le, nettement *infini*, alors là pas de doute.

Et si, comble de malchance p valait 0, ce qui, même hautement probable, n'est tout de même pas certain, prendre le pari de Dieu nous fait mener, tendre en tout cas vers une vie bonne.

**Alors qui voudrait ne pas parier
sur Dieu à la loterie de la vie?
Parier est la seule voie rationnelle**

Menez une bonne vie et *espérez* en le seigneur²



² Le portrait de Pascal, présumé âgé de 26 ans, est à la sanguine, par son ami Jean Domat. (BNF). En filigrane une modification du même.

Discussion

Dans son opuscule, éblouissant texte en fait (cliquer pour importer) [Entretien d'un philosophe avec la Maréchale de***](#), [Denis Diderot](#) [1713 – 1784] prend le contrepied de Pascal tout en s'amusant à mettre la Maréchale dans ses petits souliers de croyante, avec toutes sortes de petites histoires et raisonnements amusants et ... quelque peu moqueurs.³

Il expose là pourquoi les incroyants n'ont pas besoin de divinité pour vivre selon une morale humaine, et laissent le soin à d'autres de décider de l'existence ou non d'une divinité au-dessus de nos têtes qui pourrait retenir la population dans les sentiers d'un comportement honnête.

Il est à noter que, comme pour la plupart de ses œuvres, ce texte ne fut pas publié du vivant de Diderot. La censure était omniprésente et redoutable même à la fin du XVIII^e siècle, qui fut qualifié plus tard de *Siècle des Lumières*... Diderot en savait quelque chose avec les bâtons dans les roues que lui mettait l'administration royale pour la publication de son immense travail d'édition de l'Encyclopédie! Il avait d'ailleurs passé trois mois enfermé à la prison de Vincennes de la fin juillet à novembre 1749, sous [lettre de cachet](#), pour certains écrits *dangereux*, notamment sa «[Lettre sur les aveugles à l'usage de ceux qui voient](#)». Expérience parfaitement traumatisante qu'il ne voulait pas renouveler...

³ Qu'on peut trouver aussi dans : Diderot, *Œuvres*, Gallimard, Bibliothèque de La Pléiade, Paris, 1951, pp.1171-1185.

Voici quelques échanges de l'entretien avec la Maréchale qui montrent que le pari de Pascal est une sorte d'appât du gain pas tout à fait compatible avec la morale.

La Maréchale. – Quoi! Vous [qui ne croyez à rien] ne volez point, vous ne tuez point, vous ne pillez point?

Crudeli (le philosophe). – Très rarement.

La Maréchale. – Que gagnez-vous donc à ne pas croire?

Crudeli. – Rien du tout, madame la maréchale. Est-ce qu'on croit, parce qu'il y a quelque chose à gagner?

La Maréchale. – Je ne sais; mais la raison d'intérêt ne gâte rien aux affaires de ce monde ni de l'autre.

Crudeli. – J'en suis un peu fâché pour notre pauvre espèce humaine. Nous n'en valons pas mieux.

On a glosé tant et tant sur la pensée de Pascal, mais Diderot en quelques mots souriants en fait une importante critique, en pointant vers la petitesse de l'esprit humain, ce en quoi il rejoint Pascal... qu'on ne voit pas cependant sourire souvent!

Postludes

On doit remarquer que le texte même du pari de Pascal, la pensée numérotée 397 dans l'édition de Le Guern⁴, est assez complexe à lire. Pascal analyse plusieurs cas de figure dans le langage du *problème des partis* qui n'a plus cours sous cette terminologie (le langage moderne est exposé plus haut), et qui a fondé la théorie des probabilités. Nous avons dû simplifier, et réduire l'argument à son squelette⁵ :

[...] Pesons le gain et la perte en prenant croix que Dieu est. Estimons les deux cas : si vous gagnez, vous gagnez tout, si vous perdez, vous ne perdez rien ; gagez donc qu'il est sans hésiter. Cela est admirable. – Oui, il faut gager, mais je gage peut-être trop. [...]

Le texte est présenté comme un dialogue entre deux amis, dont l'un est Pascal lui-même.

On a énormément glosé sur tous les cas de figure évoqués par Pascal, sur leurs étendues & extensions, leurs limites.

On peut se référer, entre mille autres ressources électroniques, aux propos de [Denis Moreau](#) de l'Université de Nantes, ou encore seulement [regarder le vidéo](#).

Un petit détour par [Ma nuit chez Maud](#) de Rohmer (film de 1969)? plus spécifiquement la [discussion sur le pari de Pascal](#) ?

Le [texte suivant](#) rapporte un compte rendu du film.

⁴ Michel LE GUERN, *Pascal. Œuvres complètes*, Tome II, pp.676-681, Gallimard, Bibliothèque de La Pléiade, Paris, 1996.

⁵ Voir les autres cas de figure au site suivant : http://fr.wikipedia.org/wiki/Pari_de_Pascal.