LA DISSONANCE COGNITIVE COMME PUISSANT MOYEN PÉDAGOGIQUE EN ENSEIGNEMENT DE LA STATISTIQUE. LE CAS DES PARADOXES DE BAYES ET DE SIMPSON

Marc Bourdeau

École Polytechnique de Montréal,
CP-6079 Centre-ville, Montréal, Qc, Canada, H3C 3A7. Louis.Marc.Bourdeau@Gmail.com

Résumé. On doit présenter les concepts de proba-stat par des exemples qui font dresser l'oreille. Les dissonances cognitives, qu'on peut aussi appeler les paradoxes, constituent les plus frappants des exemples. Nous en présenterons deux : (1) le règle de Bayes qui prend son sens de paradoxe, dans le cas où l'incidence dans la population de la condition a priori est très faible et qu'on en cherche sa probabilité *a posteriori* à partir d'un test positif très efficace *a priori*; (2) le paradoxe de Simpson, qu'on pourrait appeler «Attention, un train peut en cacher un autre». Ils introduisent à deux des chapitres les plus importants de la statistique actuelle : la statistique bayésienne, et l'analyse causale. Ces deux paradoxes sont des façons d'examiner les causes à partir des effets. Nous en présenterons quelques exemples marquants.

Mots-clés. Dissonance cognitive, paradoxe de Bayes, paradoxe de Simpson, statistique bayésienne, analyse causale.

Abstract. Examples that prick up the student's ears are a must for pedagogical efficiency. But the ultimate eye opener is to titillate a cognitive dissonance by using paradoxes. We will present two paradoxes that introduce two of the most important chapters in modern statistical teaching: (1) Bayes rule, that becomes, for example in the medical context, quite paradoxical when the incidence of the 'sickness' in the population is low in spite of very efficient tests; (2) we will present Simpson's paradox from a classical example, which will introduce to the difficulties of collapsing crossed tabulated data. Both of these paradoxes serve as perfect introductions to Bayesian statistics and causal analysis, two of the very important chapters of modern statistics.

Keywords. Cognitive dissonance, Bayes' paradox, Simpson's paradox, bayesian statistics, causal analysis.

1 Introduction

Une idée un peu vive y a l'air d'une grossièreté,
tant on y est accoutumé aux mots sans relief.
Malheur à qui invente en parlant.
(Stendhal, *Le rouge et le noir*.)

Plusieurs auteurs soulignent la nécessité d'intéresser les étudiants de la statistique à l'aide d'exemples frappants susceptibles de leur faire mettre en doute leurs connaissances, de leur faire prendre une distance critique avec la doxa courante (e.g. Batanero *&al*., 2004 ; Carlton, 2005 ; Konold, 1995 ; Novak 1977). Témoin aussi ce déjeuner-table-ronde au dernier JSM, le JSM'14, où Allan Rossman, pédagogue bien connu aux USA, a mis en interaction au JSM-2014 une dizaine de convives qui ont discuté sur le thème « *Ideas for teaching Statistics from popular science books* »[1], où les paradoxes (du grec : contre—à rebours—de l'opinion) sont revenus à plusieurs reprises. Incidemment, une grande partie des livres qui sont servi de base aux discussions (voir le lien ci-haut pour les références) sont accessibles dans toute bonne bibliothèque universitaire, voire publique. Ils peuvent être très utiles pour des présentations frappantes de notre discipline. Cette table-ronde ainsi que d'autres présentations au même JSM ont servi de déclencheur à notre communication.

Dans le meilleur des cas, les exemples constituent de véritables dissonances cognitives qui peuvent frapper les étudiants de stupeur, les faire sortir de leur sommeil dogmatique : ils n'oublieront jamais les concepts introduits de telle façon (Cooper, 2007).

Dans la suite nous présentons en détails deux paradoxes très utiles pour présenter ce qui apparaît comme les deux chapitres les plus importants de la statistique actuelle, qu'on enseigne d'ailleurs de plus en plus tôt dans les cursus appliqués de proba-stat. Nous présentons le premier dans un contexte biomédical, où on en trouve d'innombrables applications, et le second dans un contexte social. Dans les deux cas, on veut remonter d'un effet à sa cause.

Il s'agit, pour le premier de la règle de Bayes qui introduit aux incontournables statistiques bayésiennes. La règle de Bayes devient carrément paradoxale lorsqu'on cherche à inverser la condition a priori par son a posteriori, dont l'incidence dans la population est très petite, de sorte qu'il n'est pas inutile de renommer en paradoxe la règle de Bayes. Le second, le très célèbre paradoxe de Simpson, est d'origine très ancienne (Pearl, 1996, diapo 61 ; Pearl, 2000), probablement même vers la fin du XIX^e^ siècle, et c'est Simpson qui le retrouva en 1951. On lui donna son nom par la suite, une autre instance de la loi d'éponymie de Stigler. Ce paradoxe prépare à l'analyse causale qui prend une ampleur elle aussi incontournable dans tout enseignement de la statistique moderne.

2 Le paradoxe de Bayes

On enseigne la règle de Bayes dans les tout premiers moments d'un exposé sur la probabilité. On l'enseigne de façon en général algébrique, sous forme d'équation. Il ne faut pas penser bien longtemps pour trouver une façon géométrique (en arbre) qui éclaire bien mieux la chose. Stigler traite de la question sommairement (2011) tout en présentant une «machine» construite par Galton pour visualiser la règle de Bayes.

On fera voir l'aspect paradoxal de la règle de Bayes sur un exemple biomédical, où la situation est fréquente. Désignons par M la présence d'une maladie chez un sujet et par '+' ou '-' une réponse positive à un test de dépistage. Même si par exemple les probabilités $P[+ \mid M]$ et $P[- \mid \neg M]$ valent 0,999, sont donc très élevées (très peu de faux positifs et de faux négatifs) de sorte que le test est vraiment efficace, la règle de Bayes donne, dans le cas où la maladie M est rare dans la population, $P[M] = 0{,}0001$ par exemple, que $P[M \mid +] = 0{,}09$ environ, ce qui est bien paradoxal : un test positif n'assure aucunement que le test peut détecter la présence de la maladie. C'est là une dissonance cognitive qui frappe les esprits. Et comme c'est presque toujours le cas dans les applications, pensons au test du VIH par exemple, l'utilité de tests presque parfaits semble mise en question.

[1] http://www.amstat.org/meetings/jsm/2014/onlineprogram/AbstractDetails.cfm?abstractid=311314.

On présentera une animation pour faire comprendre le paradoxe qui n'en est pas un, l'énoncé est parfaitement défini, le résultat juste : il est mathématique ! On montrera comment une arborescence fréquentielle, contrairement aux calculs algébriques habituels, permet de simplifier la compréhension …et les calculs. On montrera enfin comment on surmonte ce paradoxe dans les sciences de la santé (Bhatti & Wightman, 2008). Le site wikipedia [sous-jacent](#) ([et en anglais](#)) décrit la procédure dans le cas très particulier du test du VIH. Un protocole analogue mais plus simple est pratiqué pour tous les tests sur la présence de virus.[2] Nous décrirons l'essentiel. Tout est toujours plus compliqué qu'il n'y paraît…

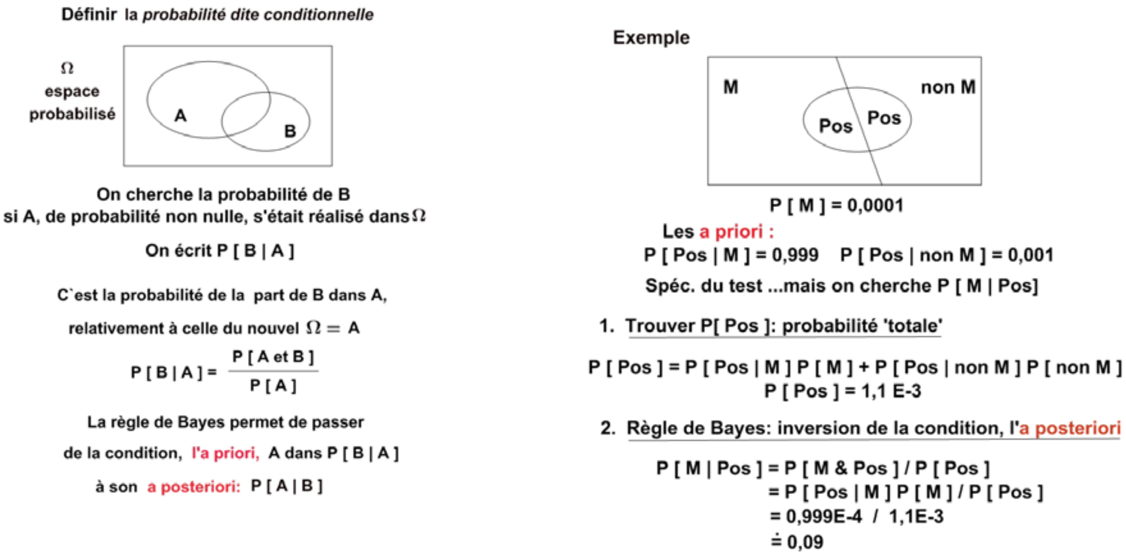

Figure 1. Définir la probabilité conditionnelle (à gauche). La version algébrique de la règle de Bayes, avec un graphique pertinent pour retenir la formule (à droite). On passe de la probabilité de *l'effet étant donné la cause* (l'a priori), à celle de la *cause étant donné l'effet* (l'a posteriori).

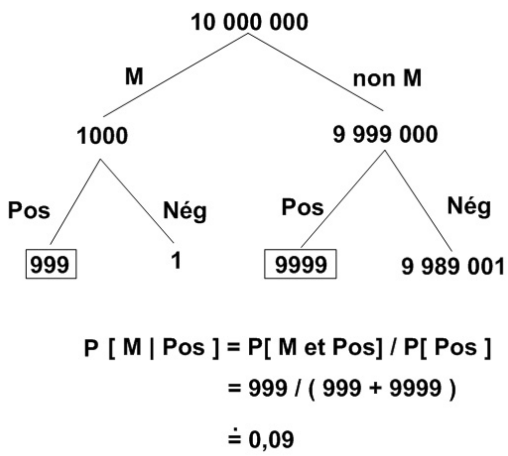

Figure 2. Un calcul en arborescence sur des fréquences/proportions pour un échantillon de 10 000 observations, pour illustrer la règle de Bayes dans un cas paradoxal.

---

[2] Dans ce cas spécifique de la détection des personnes atteintes du VIH, on aurait dû citer Lepage & Perron, deux statisticiens de l'Université de Montréal qui ont publié à la fin des années quatre-vingts une note sur ce paradoxe, mais nous n'avons pu retrouver la citation. On l'a utilisée en classe pendant des années.

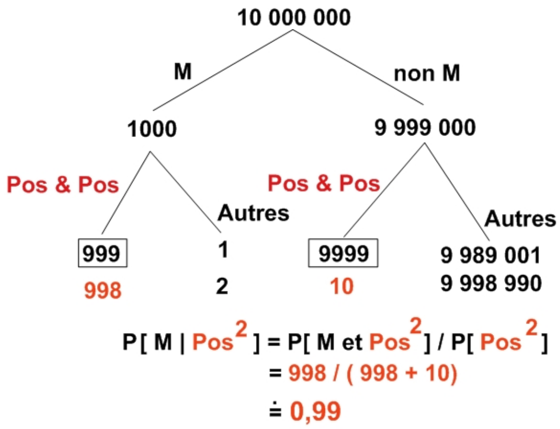

Figure 3. Lorsqu'on répète de façon indépendante le test pour un sujet donnée, on doit appliquer la règle de Bayes sur le cas de tests doublement positifs : on a alors $P[+ \& + | M] = 0{,}999^2 \approx 0{,}998$, et $P[+ \& + | \neg M] = 0{,}001^2 = 10^{-6}$. C'est cette dernière probabilité qui change tout (voir les nombres en rouge).

Animation Excel

Ailleurs que dans les sciences de la santé, en intelligence artificielle (les systèmes experts) par exemple dont la règle de Bayes est un des outils importants, c'est une autre question. On doit recourir à des astuces de la logique pour s'en sortir. En santé, la situation est plus simple[3]...

Il n'en reste pas moins que l'avenir des méthodes bayésiennes est radieux, maintenant que les calculs sont automatisables. On en trouve des preuves tous les jours pour obtenir des estimateurs, effectuer des tests et dans bien d'autres applications. On peut obtenir sur bien peu de données des conclusions d'une précision étonnante. Les prévisions de Nate Silver pour les élections présidentielles américaines de 2008 & 2014 en sont une preuve stupéfiante.

Le vieux conflit entre les méthodes fréquentielles et les méthodes bayésiennes semble maintenant apaisé, même s'il reste de la braise sous les cendres. L'enseignement de ces dernières dans les bas niveaux, toutefois, reste controversé (e.g. Rossman, Dietz & Moore, 2013). La statistique bayésienne et sa 'rivale' fréquentielle ont chacun trouvé leur place.[4] Notamment en sciences de la santé.

La naissance de la règle de Bayes est un peu confuse. Le Révérend Thomas Bayes [1702-1761], pasteur dissident, i.e. presbytérien, de l'église anglicane ne l'a pas publiée de son vivant. Elle a été publiée deux ans après sa mort, dans une forme quasi illisible aujourd'hui par son ami Richard Price, lui aussi pasteur dissident, qui l'aurait publiée en tant que preuve de l'existence de Dieu[5] (Hooper, 2013) ! Elle fut rapportée avant Bayes lui-même puis redécouverte par Laplace et plusieurs autres (Senn, 2003 ; Stigler, 1983 & 1999).[6]

---

[3] Il n'est pas inutile de noter que pour le statisticien l'estimation de faibles probabilités pose tout un problème. En effet, d'après la loi géométrique, si un événement se produit avec une probabilité p, il faut en moyenne (bien interpréter cette moyenne dans le contexte fréquentiel), attendre l'essai $1/p$, pour le voir apparaître une première fois dans une suite d'essais indépendants. Ainsi pour $p = 0{,}0001$, $\mu = 1/p = 10000$, $\sigma = \sqrt{q} / p \approx 9\,995$…

[4] On pourra se reporter aux récentes *Guidelines for Undergraduate Programs in Statistical Sciences (2014).* On assiste par ailleurs à un renouveau de cette querelle de paradigmes, notamment dans *The American Statistician.*

[5] En effet, la règle de Bayes permet de donner une probabilité à la cause connaissant l'effet, et qui dit cause dit cause finale, voire la cause première…

[6] Stigler fut le *President's invited speaker* lors du JSM2014. On trouvera son remarquable discours intitulé *«The seven pillars of statistical wisdom»* dans le premier numéro du volume 110 du JASA .

3 Le paradoxe de Simpson

On trouve peut-être la définition la plus claire du paradoxe de Simpson dans Pearl (1996, diapo 48) :

> *« Any statistical relationship between two variables may be reversed by including additional factors in the analysis »*

Même si les exemples viennent le plus souvent de tableaux croisés (dits aussi les tableaux de contingence), on peut le visualiser (Fig. 1) dans des analyses de régression.

Il n'y a rien de bien mystérieux dans ces inversions paradoxales de tendance lorsqu'on introduit des facteurs supplémentaires dans les analyses statistiques. Mais il arrive que des analyses soient plutôt tendancieuses… C'est ainsi qu'il importe d'alerter les étudiants sur les analyses statistique mettant en action notamment des tableaux croisés et leur interprétation causale.

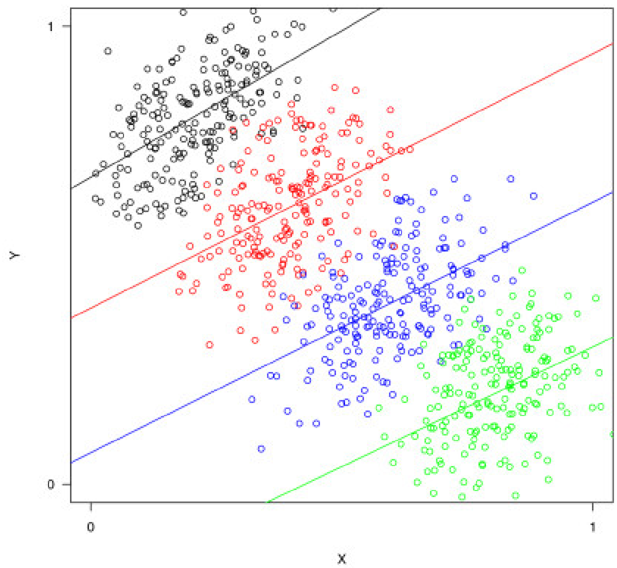

Figure 4. Les deux variables quantitatives du plan sont corrélées négativement, mais la corrélation s'inverse lorsqu'on considère la corrélation conditionnellement aux quatre niveaux (notés par des couleurs différentes) d'une autre variable, qualitative celle-là. (l'article de Wikipedia sur le paradoxe de Simpson présente une illustration semblable).

Un exemple célèbre (qualifié de classique par J. Pearl [2009]) est celui concernant la poursuite en justice intentée par un groupe féministe contre l'Université de Berkeley pour sa politique discriminatoire dans l'admission aux études supérieures (Bickel *&al*, 1975)[7]. Il vaut la peine qu'on rapporte les faits ici. Au Tableau 1, on constate la prédominance des hommes admis. Mais si on introduit la variable 'département', la tendance est inversée (Tab. 2, pour les plus grands départements). On constate un biais dans plusieurs départements pour les femmes.

[7] Peter J. Bickel est un statisticien renommé par ailleurs, mais c'est cet article de lui qu'on cite le plus souvent, car il a fait l'objet d'une grande diffusion publique à l'époque. Le magazine *Science* est en effet très respecté et très lu dans la communauté des savants.

Tab.1. Tableau croisé des demandes d'admission et des taux d'admission par sexe, aux études supérieures à l'Université Berkeley en 1975. Les femmes sont désavantagées.

	Applications	Admissions
Hommes	8442	**44%**
Femmes	4321	35%

Tab. 2. Quand on fait jouer la variable 'département' des postulants la tendance est inversée. Dans le tableau, les observations pour les plus grands départements en 1973. La situation est plus nuancée…

Département	**Hommes**		**Femmes**	
	Applications	**Admission**	**Applications**	**Admissions**
A	825	62%	108	**82%**
B	560	63%	25	**68%**
C	325	**37%**	593	34%
D	417	33%	375	**35%**
E	191	**28%**	393	24%
F	373	6%	341	**7%**

Plutôt que de compléter par un des exemples fréquents (trop souvent fictifs) tirés des disciplines de la santé (e.g. Gerville-Réache [s.d.]), on profitera de l'actualité aux USA en cet automne 2014, pour donner à l'exposé oral, dans une leçon de chose, deux autres exemples, tirés des …paradoxes insolubles de la justice américaine, et qui montrent les difficultés d'effectuer des collapsus (e.g. Croux, 2005) dans des tableaux de contingence.[8] Cliquer sur ce lien pour l'obtenir.

Bien d'autres articles ont traité de divers aspects de ce paradoxe bien connu. Le magazine de vulgarisation statistique, *Significance*, en rapporte plusieurs dizaines de références récentes[9]. De même que *The American Statistician*. Les paradoxes de Simpson sont-ils rares ou fréquents (Pavlides & Perlman, 2009)?

Tout cela se rapporte à une attitude fondamentale en sciences : la nécessité de bien penser (et de savoir calculer!) en termes de variables réponses et des variables influentes sur les réponses. On pourra avantageusement présenter en classe la causalité, et les schémas causaux en passant par ce paradoxe (Armistead, 2014 et sa suite des commentaires, surtout Pearl, 2014).

L'appellation de ce paradoxe montre encore un exemple de la loi d'éponymie de Stigler (1999). Ce n'est pas Simpson (1951) qui a été le premier à décrire ce paradoxe même s'il en porte le nom. Jusqu'à plus ample information… K. Pearson l'a précédé à la fin du XIXe siècle. George Udny

[8] Et illustrer peut-être les vertus pédagogiques des leçons de chose… Le premier des exemples est rapporté aussi dans Fine (1992),

[9] Le magazine *Significance*, publié par Wiley, soutenu par l'ASA et la RSS, est toujours intéressant et de lecture très facile. Dans le même ordre d'idée, l'autre magazine de vulgarisation soutenu par l'ASA est *Chance*, dont les chroniques sont, là aussi, souvent très intéressantes. Il est publié par Springer.

Yule lui a emboîté le pas peu après en 1903.[10]

Comme l'a dit Alfred North Whitehead *«Everything of importance has been said before by somebody who did not discover it.»*[11]

4 Conclusions

On se doit de motiver les étudiants pour la statistique, une discipline plutôt aride pour la plupart, de renverser leurs préjugés. Une fois admis l'importance de présenter les concepts de proba-stat et de bien de disciplines par des exemples frappants, si possible des dissonances cognitives, il reste qu'il n'est pas possible d'en trouver dans tous les cas.[12] On pourrait peut-être penser constituer un site internet pour ces exemples explicités à des fins pédagogiques.[13]

Nous avons toutefois élaboré deux exemples qui permettent une présentation saisissante de deux des chapitres les plus importants de la statistique actuelle : la statistique bayésienne, et l'analyse causale.

La première est maintenant d'utilisation courante. D'aucuns, plutôt radicaux, pensent que la statistique fréquentielle sera bientôt caduque, ce qui nous semble très exagéré.

La seconde donne lieu à toutes les méthodes d'ajustement des schémas causaux. Elle prépare aux modèles structurels omniprésents en sciences humaines & sociales, en sciences de la santé En réalité, les deux paradoxes présentés ici sont au fondement de l'analyse causale.

À cet égard, on peut penser que les récents développements de l'analyse causale en statistique (en sus des citations plus haut, on trouve Pearl [1996] une présentation élémentaire, et le désormais classique Pearl [2009]), qui renoue avec le problème philosophique classique de la causalité (Mumford & Anjum, 2013), vont constituer les avancées les plus intéressantes de la statistique contemporaine (e.g. Asher, 1983 ; Collier *&al*, 2010 ; Freedman, 2009 ; Hamilton, 2008 ; Iaccobuci, 2008 ; Kleinberg, 2013 ; Morgan & Winship, 2007 ; Shafer, 1996).[14]

Il importe donc d'exposer la jeunesse dès ses premières leçons en méthodes quantitatives, i.e. scientifiques, aux deux chapitres dont les prémices sont présentées ici.

---

[10] Le lecteur intéressé par l'histoire pourra consulter avec profit Droesbeke *&al.* (1990; 1997; 2005 chap. 1) sur la querelle qui opposa K. Pearson et Yule concernant les indicateurs d'association dans les tableaux de contingence, de même que Stigler (1986, chap. 10).

[11] Celui du célèbre *Principia Mathematica* (Russell & Whitehead) : Whitehead, Alfred North (1929, réédité en 1967), *The aims of education and other essays.* New York NY: The Free Press.

[12] Léo Gerville-Réache de l'Université de Bordeaux en présente un florilège (*cf.* la bibliographie), dont les deux qui sont longuement développés ici qui se prêtent plus particulièrement à l'enseignement de la statistique.

[13] À cet égard, il y a eu au même colloque CFIES-2015 où fut présenté ce texte pour la première fois une autre présentation du paradoxe classique de la combinatoire sur la probabilité de trouver dans une classe de N étudiants deux étudiants ayant la même date d'anniversaire : elle dépasse ½ dès que N>22, contrairement à bien des intuitions d'étudiants, d'où le paradoxe. Nous sommes d'avis toutefois que la combinatoire doit être réduite au minimum pour toute introduction de la probabilité à des fins statistiques, et ne pas exposer ce paradoxe. Les lois binomiales, binomiales négatives, hypergéométriques et de Poisson peuvent très bien être exposées sous forme de formules sans démonstration, ne comporter que des applications.

[14] On pourra se rapporter ici à l'important site de Judea Pearl sur la question. Ou encore à une de ses conférences vidéo : http://research.microsoft.com/apps/video/default.aspx?id=206977.

4.1 Consonances humanistes

On ne saurait réduire l'enseignement aux éléments techniques des disciplines. Pour la statistique encore moins que pour la plupart des disciplines scientifiques. En effet, celle-là est au centre de la méthode scientifique et elle est transdisciplinaire par nature. Terminons sur la pédagogie de l'enseignement en développant un peu sur ce qui transparaît sans doute du texte qui précède.

Les notes historiques présentent un intérêt considérable pour les étudiants. On voit invariablement les étudiants s'allumer quand on fait des parenthèses historiques, bien plus que par des 'blagues' que bien des pédagogues patentés recommandent pour alléger les cours… Rester pertinent est une règle pédagogique. D'ailleurs on trouve maintenant des notices historiques dans plusieurs manuels américains de base, et les maisons d'éditions en sont friandes.

On me permettra d'insister en terminant, à la suite de beaucoup d'autres (Baillargeon, 2011 ; Postman, 1993, 1996, 2000 ; Renaut, 2002 ; Russell, 1926 ; Whitehead, 1929[1967]) sur la formation générale et humaniste que doit posséder tout homme éduqué, en particulier dans les sciences, qu'elles soient naturelles, appliquées, les sciences humaines et sociales et les sciences de la santé.[15] Tout enseignant soucieux d'une formation humaniste pourrait ainsi avec profit intégrer l'histoire de sa discipline dans son enseignement, comme Postman (2000) l'a proposé avec beaucoup d'éloquence.

On peut aussi penser, dans la grande tradition de l'école française, agrémenter les cours de proba-stat par des «leçons de choses» en se servant de l'actualité : les journaux sont remplis de tableaux, de résultats d'enquête, de considérations statistico-économiques qui demandent souvent quelques réserves… Les étudiants vivent dans le monde réel, la statistique aussi ! Ils apprécient énormément ces leçons de choses croquées sur le vif en quelque sorte.

Des documents complémentaires sont disponibles à la page suivante.

On trouve un résumé des conclusions à la page suivante.

Bibliographie

Armistead, T. W. (2014). Rejoinder on Armistead TAS 68(1). *The American Statistician, 68*(1), pp. 30-31.

Armistead, T. W. (2014). Resurrecting the third variable: a critique of Pearl's causal analysis of Simpson's paradox. *The American Statistician, 68*(1), pp. 1-7.

Asher, H. B. (1983). *Causal models* (éd. 2). Beverly Hills CA: Sage Publications, QASS no. 3.

Baillargeon, N. (2011). *Liliane est au lycée. Est-il indispensable d'être cultivé?* Paris F: Flammarion.

Batanero, C., Godino, J. D., & Roa, R. (2004). Training teachers to teach Probability. *Journal of Statistics Education, 12*(1).

Bernstein, P. L. (1996). *Against the gods. The remarkable story of risk.* New York NY: John Wiley & Sons.

---

[15] Il faut toujours exagérer, entend-on parfois… Allons-y! Voici une référence capitale sur l'éducation dans le monde moderne : Allan Bloom (1987). *L'âme désarmée. Essai sur le déclin de la culture générale.* Paris F : Julliard. Curieusement publiée en français avant de l'être en anglais, grâce à Pierre Manent qui a connu Bloom à Chicago. Bloom est un grand styliste. Voir Bloom (1987) dans la bibliographie.

Bhatti, C. R., & Wightman, J. L. (2008). Conditional probability and HIV testing. *The American Statistician, 68*(3), pp. 238-241.
Bickel, P. E., Hammel, E. A., & O'connell, J. W. (1975). Sex bias in graduate admissions: data from Berkeley. *Science, 187*(4175), pp. 398-404.
Bloom, A. (1987). *The closing of the american mind. How higher education has failed democracy and impverished the souls of today's students.* New York NY: Simon and Schuster.
Boreux, J.-J., Parent, É., & Bernier, J. (2010). *Pratique du calcul bayésien.* Paris F: Springer.
Carlton, M. A. (2005). Pedigrees, prizes, and prisoners: the misuse of conditional probability. *Journal of Statistics education, 13*(2).

Christensen, r. (2014). Comment on Armistead's TAS 68(1). *The American Statistician, 68*(1), pp. 13-17.
Cognitive dissonance. (2013). *Encyclopaedia Britannica Ultimate Reference Suite.* Chicago IL.
Collier, D., Sekkon, J. S., & Starck, P. B. (Éds.). (2010). Statistical models and causal inference: a dialogue with the Social Sciences by David A. Freedman. New York NY: Cambridge University Press.
Cooper, J. (2007). *Cognitive dissonance. 50 years of a classic theory.* Newbury Park CA: Sage Publications.
Croux, C. (2005). Le modèle log-linéaire. Dans J.-J. Droesbeke, M. Lejeune, & G. Saporta, *Modèles statistiques pour données qualitatives* (pp. 37-70). Paris F: Éditions Technip.
Droesbeke, J.-J., & Tassi, P. (1990). George Udny Yule ou comment (ne pas) parler de corrélation. *Statistique et Analyse des données, 15*, pp. 25 - 43.
Droesbeke, J.-J., & Tassi, P. (1997). *Histoire de la statistique* (2e éd. corrigée). Paris F: Presses Universitaires de France, Coll. Que sais-je? No 2527.
Droesbeke, J.-J., Lejeune, M., & Saporta, G. (Éds.). (2005). *Modèles statistiques pour données qualitatives.* Paris F: Éditions Technip.
Fine, J. (1992). Modèles graphiques d'associations. Dans J.-J. Doresbeke, B. Fichet, & P. Tassi, *Modèles pour l'analyse des données multidimensionnelles* (pp. 267-313). Paris F: Éditions Économica.
Freedman, D. A. (2009). *Statistical Models. Theory and practice* (éd. révisée). New York NY: Cambridge University Press.
Gerville-Réache. (s.d.). *Mes paradoxes préférés.* Bordeaux. Disponible chez l'auteur : Leo.Gerville@U-Bordeaux2.fr.
Hamilton, L. (2008, Juin). *Low tech causal modeling, http://pubpages.unh.edu/~lch/causal2.pdf.*
Hooper, M. (2013). Richard Price, Bayes theorem, and God. *Significance, 10*(1), pp. 36-39.
Iacobucci, D. (2008). *Mediation analysis.* Thousand Oaks CA: Sage Publications, QASS no 156.
Iversen, G. R. (1984). *Bayesian statiscial inference.* Newbury Park CA: Sage Publications.
Kleinberg, S. (2013). *Causality, probability, and time.* New York NY: Cambridge University Press.
Konold, C. (1995). Issues in assessing conceptual understanding in Probability and Statistics. *Journal of Statistics Education, 3*(1).
Liu, K., & Xiaa-Li, M. (2014). Comment on Armistead: A fruitful resolution to Simpson's paradox via multiresolution inference. *The American Statistician, 68*(1), pp. 17-29.
Morgan, S. L., & Winship, C. (2007). *Counterfactuals and causal inference. Methods and principles for social research.* New York NY: Cambridge University Press.
Mumford, S., & Anjum, R. L. (2013). *Causation. A very short introduction.* Oxford UK: Oxford University Press.
Novak, J. D. (1977). *A theory of education.* Ithaca NY: Cornell University.
Pavlides, M. G., & Perlman, M. D. (2009). How likely is Simpson's paradox? *The American Statistician, 63*(3), pp. 226-233.

Pearl, J. (1996, Octobre 29). *The art and science of cause and effect.* Récupéré sur http://bayes.cs.ucla.edu/LECTURE/lecture_sec1.htm
Pearl, J. (1999). *Simpson's paradox: an anatomy.* UCLA Technical report R-264, Los Angeles CA.
Pearl, J. (2009). *Causality. Models, reasoning and inference* (2e éd.). New York NY: Cambridge University Press.
Pearl, J. (2013). *Understanding Simpson's paradox.* UCLA Technical Report R-414, Los Angeles CA.
Pearl, J. (2014). Comment on Armistead's TAS 68(1): Understantding Simpson's paradox. *The American Statistician, 68*(1), pp. 8-13.

Pearson, K., Lee, A., & Bramley-Moore, L. (1899). Genetic (reproductive) selection: inheritence of fertility in man. *Philosophical Transaction of the Royal Society A, 73*, pp. 534-539.
Postman, N. (1993). *Technopoly. The surrender of culture to technology.* New York, NY: Random House.
Postman, N. (1996). *The end of education. Redefining the value of school.* New York, NY: Random House.
Postman, N. (2000). *Building a bridge to the 18th century. How the past can improve our future.* New York, NY: Alfred A. Knopf.
Renaut, A. (2002). *Que faire des universités.* Paris F: Bayard Éditions.

Rossman, A., & Dietz, E. J. (2013). Interview with David S. Moore. *Journal of Statistics Education, 21*(2).
Russell, B. (1926). *Education and the good llife.* New York NY: Liveright Publishing Company.
Senn, S. (2003). *Dicing with death. Chance, risk and health.* Cambridge UK: Cambridge University Press.
Shafer, G. (1996). *The art of causal conjecture.* Cambridge MA: The MIT Press.
Simpson, E. (1951). The interpretation of interaction in contingency tables. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 13*, pp. 328-340.
Stigler, S. M. (1983). Who discovered Bayes's theorem? *The American Statistician, 37*(4), pp. 290-296.
Stigler, S. M. (1986). *The history of Statistics. The measurement of uncertainty before 1900.* Cambridge MA: Cambridge University Press.
Stigler, S. M. (1999). *Statistics on the Table. The History of Statistical concepts and Methods.* Cambridge MA: Harvard University Press.
Stigler, S. M. (2011, Fév.). Galton visualizing bayesian inference. *Chance*.
Yule, G. U. (1903). Notes on the theory of association of attributes in Statistics. *Biometrika, 2*, pp. 121-134.